И.В. Лёвкин

ВЫВОД В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Барнаул
2026

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Алтайский государственный технический университет
им И. И. Ползунова

И. В. Лёвкин

ВЫВОД В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ
(материалы спец. курса)

Учебное пособие

9 785756 815450

АлтГТУ
Барнаул • 2026

Об издании 1, 2

УДК 681.3.06

Лёвкин И. В. Вывод в логике высказываний (материалы спец. курса): учебное пособие. / И. В. Лёвкин. АлтГТУ. – Барнаул : АлтГТУ. 2026. – 53 с. – – URL : http://elib.altstu.ru/uploads/open_mat/2026/Levkin_VvLV_up.pdf. – Текст: электронный.

ISBN 978-5-7568-1545-0

В учебном тексте представлены материалы для организации занятий дисциплине «Моделирование и анализ процессов, систем и объектов защиты информации» для направления 10.03.01 «Информационная безопасность». Пособие обеспечивает самостоятельную работу студентов.

Издается в авторской редакции.

Рецензенты:

Зрюмова Анастасия Геннадьевна, к.т.н., доцент, зав. каф. «Информационные технологии»
Плетнёв Павел Валерьевич, к.т.н., директор ООО «Центр информационной безопасности»

Учебное пособие

Минимальные системные требования: Yandex (20.12.1) или Google Chrome (87.0.4280.141) и т.п., скорость подключения - не менее 5 Мб/с, Adobe Reader и т.п.

Дата подписания к использованию 19.01.2026 Объем издания – 1,5 Мб.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова», 656038, г. Барнаул, пр-т Ленина, 46, https://www.altstu.ru.

ISBN 978-5-7568-1545-0

© Алтайский государственный технический университет им И. И. Ползунова, 2026
© И. В. Лёвкин, 2026

Вперед (к оглавлению)

СОДЕРЖАНИЕ

1 Логика высказываний 4
1.1 Высказывания и операции 4
1.2 Задачи с решениями 5
1.3 Определения 9
1.4 Принцип полной дизъюнкции 9
1.5 Задачи I 9
1.6 Задачи II 13
1.7 Задачи III 19
Обратная и противоположная теоремы 19
Принцип полной дизъюнкции 24
Необходимые и достаточные условия 25
Упрощение систем высказываний 30
Правильные и неправильные рассуждения 32
Нахождение всех следствий из посылок 34
Нахождение посылок для следствий 35
«Логические» задачи 35
1.8 Задачи IV 38
1.9 Задачи V 39
2 Выводимость 40
3 Метод резолюций 44
4 Исчисление высказываний 45
4.1 Задачи VI 48
4.2 Задачи VII 49
4.3 Задачи VIII 51
5 Формальная теория 51
Использованные источники 53

1 ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.1 ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ОПЕРАЦИИ

- $< A, \Omega >$.
- $A = \{a_i\}_{i \in I}$, $a_i = 0 \vee 1$, $и \vee л$, $true \vee false$.

  a=“$(2^{16}+1)$ – простое”, $a=true$; b=”$(2^{32}+1)$ – простое”,b⋮641;

  c = ”существует бесконечно много простых чисел p, для которых $(p+2)$ – простое”, $c = 0 \vee 1$?
- $N_2 = \{0,1\}$, $y = f(x)$, $Def(f) \subseteq N_2$, $\mathrm{Im}(f) \subseteq N_2$,

  $y = f(x)$ - логическая (Булева) функция; $\varphi(x_1,..., x_n)$, $\varphi : N_2^n \to N_2$.
- $\Omega = \{\#_i\}_{i \in J}$; $\Omega = \{\neg, \&, \vee, \to, \downarrow, \leftrightarrow, |, ...\}$.

a	b	$\neg a$	$a \& b$	$a \vee b$	$a \to b$	$a \sim b$	$a \oplus b$	$a \mid b$	$a \downarrow b$	…
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	
1	1	0	1	1	1	1		0	0	

- $\bar{x} \vee y \equiv x \to y$, $\bar{x} \vee \bar{y} \equiv \overline{x \& y}$, $\bar{x} \& \bar{y} \equiv \overline{x \vee y}$,

  $x \vee \bar{x} \equiv 1$, $x \to (y \to x) \equiv 1$, $(x \& \bar{x}) \to (x \& y) \equiv 1$,

  $(x \to y) \vee (y \to x) \equiv 1$,

  $(x \& y) \sim (y \& x) \equiv 1$, $(x \vee y) \sim (y \vee x) \equiv 1$,

  $((x \vee y) \vee z) \sim (x \vee (y \vee z)) \equiv 1$, $((x \& y) \& z) \sim (x \& (y \& z)) \equiv 1$,

  $(x \& (y \vee z)) \sim ((x \& y) \vee (y \& z)) \equiv 1$,

  $(x \vee (y \& z)) \sim ((x \vee y) \& (x \vee z)) \equiv 1$.

  $x \& \bar{x} \equiv 0$, $x \to (y \to x) \sim (y \& \bar{y}) \equiv 0$.

  $\bar{x} \equiv x \mid x$, $x \& y \equiv (x \mid y) \mid (x \mid y)$.
- Логически полные: $\{\neg, \&, \vee)$, $\{\neg, \&\}$, $\{\neg, \&, \vee\}$, $\{\neg, \to\}$, $\{|\}$ $\{\downarrow\}$.
- ФАВ: переменные; если A - ФАВ, то $\bar{A}$ - ФАВ;

  если A и B - ФАВ, то $A \vee B$, $A \& B$, … - ФАВ.
- Литерал, конъюнкт, дизъюнкт, КНФ, ДНФ.

1.2 ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1 Будет ли ФАВ $((P \vee \overline{Q}) \to Q) \& (\overline{P} \vee Q)$ выполнимой, опровежимой, тавтологией, противоречием?

Решение:

P	Q	$F(P,Q)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$F(0,1) = 1 \Rightarrow$ ФАВ выполнима;

$F(1,0) = 0 \Rightarrow$ ФАВ опровержима;

$F(P,Q)$ - не тавтология, не противоречие.

2 Если $\succ \overline{F} \vee G$, $\succ \overline{G} \vee \overline{H}$, то $\succ \overline{F} \to H$. Доказать.

Доказательство.

$F(x_1,..., x_n)$, $G(x_1,..., x_n)$, $H(x_1,..., x_n)$. Пусть $\overline{F} \to H$ - не тавтология, тогда есть набор высказываний $A_1,..., A_n$, когда $F(A_1,..., A_n) = 1$, а $\overline{H(A_1,\ldots,A_n)} = 0$. Следовательно, $\overline{F(A_1,\ldots,A_n)} = 0$, тогда, т.к. $\succ \overline{F} \vee G$, то $G(A_1,..., A_n) = 1$. Т.к. $\succ \overline{G} \vee \overline{H}$, то $\overline{G(x_1,\ldots,x_n)}$=0. Противоречие.

3 Методом от противного выяснить, верна ли выводимость $F \to G,\ K \to \overline{H},\ H \to G \succ F \to \overline{K}$.

Доказательство.

Пусть на некотором наборе высказываний ФАВ-посылки истинны, а $\lambda(F \to \overline{K}) = 0$. Следовательно, $\lambda(F) = 1$ и $\lambda(\overline{K}) = 0$, т.к. $\lambda(K) = 1$. $\lambda(F \to G) = 1$ и $\lambda(F) = 1$, то $\lambda(G) = 1$. $\lambda(H \vee \overline{G}) = 1$ и $\lambda(G) = 1$, то $\lambda(H) = 1$ и $\lambda(\overline{H}) = 0$. $\lambda(K \to \overline{H}) = 1$ и $\lambda(\overline{H}) = 0$, то $\lambda(K) = 0$. Противоречие.

4 Упростить $A \to B$, $C \to B$, $(B \& C) \to A$.

Решение:

$$A \to B \& C \to B \& (B \& C) \to A \equiv$$

$$\equiv (\overline{A} \vee B) \& (\overline{C} \vee B) \& (\neg(B \& C) \vee A) \equiv$$

$$\equiv (\overline{A} \vee B) \& (\overline{C} \vee B) \& (\overline{B} \vee \overline{C} \vee A) \equiv$$

$$\equiv (\overline{A} \vee B) \& ((A \& \overline{A}) \vee \overline{C} \vee B) \& (A \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \equiv$$

$$\equiv (\overline{A} \vee B) \& (A \vee B \vee \overline{C}) \& (\overline{A} \vee B \vee \overline{C}) \& (A \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \equiv$$
$$\equiv (\overline{A} \vee B) \& (A \vee (B \& \overline{B}) \vee \overline{C}) \equiv (\overline{A} \vee B) \& (\overline{C} \vee A) \equiv$$
$$\equiv (A \to B) \& (C \to A).$$

5 Упростить систему высказываний $A \& B \& \overline{C}$, $\overline{A \to B} \& \overline{C}$, $\overline{A} \& \overline{B \to C}$, относительно которых известно, что по крайней, мере одно из них истинно.

Решение:

Условие «по крайней мере, одно истинно» влечет дизъюнкцию.

$$(A \& B \& \overline{C}) \vee (\overline{A \to B} \& \overline{C}) \vee (\overline{A} \& \overline{B \to C}) \equiv$$
$$\equiv (A \& B \& \overline{C}) \vee (\overline{\overline{A} \vee B} \& \overline{C}) \vee (\overline{A} \& \overline{\overline{B} \vee C}) \equiv$$
$$\equiv (A \& B \& \overline{C}) \vee (A \& \overline{B} \& \overline{C}) \vee (\overline{A} \& B \& \overline{C}) \equiv$$
$$\equiv (A \& B \& \overline{C}) \vee (A \& \overline{B} \& \overline{C}) \vee (A \& B \& \overline{C}) \vee (\overline{A} \& B \& \overline{C}) \equiv$$
$$\equiv (A \& (B \vee \overline{B}) \& \overline{C}) \vee ((A \vee \overline{A}) \& B \& \overline{C}) \equiv$$
$$\equiv (A \& \overline{C}) \vee (B \& \overline{C})$$

Исходная система 3-х высказываний логически эквивалентна системе двух высказываний.

6 Найти простейшую ФАВ от 3-х переменных, последний столбец таблицы истинности которой имеет вид 00001111.

Решение:

Воспользуемся СКНФ.Выделим наборы, где функция обращается в ноль: $F(0,0,0) = F(0,0,1) = F(0,1,0) = F(0,1,1) = 0$,

$$F(x,y,z) \equiv (x \vee y \vee z) \& (x \vee y \vee \overline{z}) \& (x \vee \overline{y} \vee z) \& (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \equiv$$
$$\equiv (x \vee y \vee (z \& \overline{z})) \& (x \vee \overline{y} \vee (z \& \overline{z})) \equiv (x \vee y) \& (x \vee \overline{y}) \equiv$$
$$\equiv (x \vee (y \& \overline{y}) \equiv (x \vee 0) \equiv x.$$

7 Найти ФАВ от 3-х переменных $F(x,y,z)$, чтобы $x \& F \equiv x \& y$ и $x \vee F \equiv x \vee z$.

Решение:

$x \& F \equiv x \& y$; пусть $x = y = 1$, тогда $1 \& F(1,1,z) \equiv 1 \& 1 \Rightarrow$ $F(1,1,0) = F(1,1,1) = 1$; пусть $x = 1, y = 0$, тогда $1 \& F(1,0,z) \equiv 1 \& 0$ $\Rightarrow$ $F(1,0,0) = F(1,0,1) = 0$.

$x \vee F \equiv x \vee z$; пусть $x = 0$, $z = 0$, тогда $0 \vee F(0, y, 0) \equiv 0 \vee 0 \Rightarrow$
$F(1,0,0) = F(1,0,1) = 0$; пусть $x = 0, z = 1$, тогда
$0 \vee F(0, y, 1) \equiv 0 \vee 1 \Rightarrow F(0,0,1) = F(0,1,1) = 1$.

СДНФ:

$$F(x, y, z) \equiv (x \& y \& \bar{z}) \vee (x \& y \& z) \vee (\bar{x} \& \bar{y} \& z) \vee (\bar{x} \& y \& z) \equiv$$
$$\equiv (x \& y \& (\bar{z} \vee z)) \vee (\bar{x} \& z \& (\bar{y} \vee y)) \equiv (x \& y) \vee (\bar{x} \& z).$$

8 Найти все неравносильные и не тождественно истинные ФАВ, являющиеся следствиями следующих посылок: $x \to (y \vee z)$ и $z \to y$.

Решение:

Конъюнкцию посылок приводим к СКНФ:

$$(x \to (y \vee z)) \& (z \to y) \equiv (\bar{x} \vee y \vee z) \& (\bar{z} \vee y) \equiv$$
$$\equiv (\bar{x} \vee y \vee z) \& ((x \& \bar{x}) \vee \bar{z} \vee y) \equiv$$
$$\equiv (\bar{x} \vee y \vee z) \& (x \vee y \vee \bar{z}) \& (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$$

Логические следствия – все мономы и их комбинации.

9 Найти ФАВ $F(x, y)$, являющуюся логическим следствие посылок $x \to z$, $\bar{z} \to \bar{y}$, $y \to v$, $\bar{z} \to v$.

Решение:

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
v	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$x \to z$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
$\bar{z} \to \bar{y}$	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
$y \to v$	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
$\bar{z} \to v$	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
$\bar{z} \vee v$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0

Все посылки равны1 на одном наборе $x = y = z = 0$, $v = 1$. Отсюда, если $F(0,0) = 1$, то она будет логическим следствием 4-х посылок. На всех других наборах $F(x, y) = 0$, т.е.

$$F(0,1) = F(1,0) = F(1,1) = 0, \; F(x, y) = \bar{x} \& \bar{y}.$$

10 Найти все неравносильные между собой и не тождественно ложные ФАВ, для которых $x \leftrightarrow y$ является логическим следствием.

Решение:

СКНФ: $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y)\&(y \to x) \equiv (\bar{x} \vee y)\&(x \vee \bar{y})$. Недостающие в СКНФ мономы: $x \vee y$, $\bar{x} \vee \bar{y}$. Недостающими посылками будут: $(x \leftrightarrow y)\&(x \vee y)$, $(x \leftrightarrow y)\&(\bar{x} \vee \bar{y})$, $(x \leftrightarrow y)\&(x \vee y)\&(\bar{x} \vee \bar{y})$. Чтобы определить, логическим следствием каких посылок является данная формула $F(\ldots)$, ее надо привести к СКНФ и составить конъюнкции $F(\ldots)$ с недостающими в ее СКНФ совершенными мономами, взятыми по одному, по два и т.д.

$(x \leftrightarrow y)\&(x \vee y) \equiv (\bar{x} \vee y)\&(x \vee \bar{y})\&(x \vee y) \equiv (\bar{x} \vee y)\&x \equiv$
$\equiv x\&y$.

$(x \leftrightarrow y)\&(\bar{x} \vee \bar{y}) \equiv (\bar{x} \vee y)\&(x \vee \bar{y})\&(\bar{x} \vee \bar{y}) \equiv (\bar{x} \vee y)\&\bar{y} \equiv$
$\equiv \bar{x}\&\bar{y}$.

$(x \leftrightarrow y)\&(x \vee y)\&(\bar{x} \vee \bar{y}) \equiv$
$\equiv (\bar{x} \vee y)\&(x \vee \bar{y})\&(x \vee y)\&(\bar{x} \vee \bar{y}) \equiv (\bar{x} \vee y)\&(\bar{x} \vee \bar{y})\&x) \equiv$
$\equiv \bar{x}\&x \equiv 0$.

11 Найти недостающую посылку $F(z,v)$ для $x \vee y \vee z$, $\bar{y} \vee v$, $F(z,v) \succ x\&v$.

Решение:

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
v	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$x \vee y \vee z$	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\bar{y}\&v$	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
$x\&v$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1

(0,0,1,1) – набор, где посылки равны 1, а следствие – 0. Все посылки на этом наборе не могут быть равны 1, значит $F(1,1) = 0$. Можно считать $F(0,1) = F(0,1)F(1,0) = 1$. СКНФ: $F(z,v) = \bar{z} \vee \bar{v} \equiv z \to \bar{v}$.

$z \to \bar{v}$ - искомая посылка.

12 Доказать независимость $\{\leftrightarrow, \vee\}$.

Решение:

1) $\leftrightarrow$ нельзя выразить через $\vee$, т.к. $\vee$ сохраняет 0: $0 \vee 0 = 0$, а $\leftrightarrow$ 0 не сохраняет: $0 \leftrightarrow 0 = 1$.

2) $\vee$ нельзя выразить через $\leftrightarrow$. $x \to y = x \oplus y \oplus 1$;

$(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = ((x \oplus y \oplus 1) \oplus z) \oplus 1 = x \oplus y \oplus z \oplus 0$;

$(x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)) \leftrightarrow t = x \oplus y \oplus z \oplus t \oplus 1$. Т.е. суперпозиция функций $\leftrightarrow$ имеет вид $x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n \oplus \varepsilon$, где $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$.

В суперпозиции участвуют только два аргумента x и y (при представлении $\vee$ через $\leftrightarrow$), т.е. возможны варианты $x \oplus y$, $x \oplus y \oplus 1$, x, $x \oplus 1$. Ни одна из них не совпадает с $x \vee y$, откуда следует утверждение.

1.3 ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- Для утверждения «Если A, то B», $A \to B$ обратным будет «Если B, то A», $B \to A$. Если $A \to B$ - справедливо, то обратное $B \to A$ может быть неверным.
- Для утверждения «Если A, то B», $A \to B$ противоположным будет «Если не A, то не B», $\overline{A} \to \overline{B}$. Если $A \to B$ - справедливо, то противоположное $\overline{A} \to \overline{B}$ может быть неверным.
- *Закон контрапозиции*: $y \to x \equiv \overline{x} \to \overline{y}$.Значит обратное $B \to A$ и противоположное $\overline{A} \to \overline{B}$ высказывания для $A \to B$ одновременно истинны или нет.
- *Независимость* системы функций: ни одна из функций не может быть выражена с помощью суперпозиции через другие функции системы.

1.4 ПРИНЦИП ПОЛНОЙ ДИЗЪЮНКЦИИ

Если истинны высказывания $A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_2$, …, $A_m \to B_m$, $A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_m$, $\neg(B_i \,\&\, B_j)$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,\ldots,m$, то истинны и высказывания $B_1 \to A_1$, $B_2 \to A_2$, …, $B_m \to A_m$.

1.5 ЗАДАЧИ I

1 Указать выполнимые, опровержимые, тавтологии, противоречивые ФАВ.

$(P \to Q) \to ((P \to \overline{Q}) \to \overline{P})$; $((P \to Q) \to P) \to Q$;

$(P \& (Q \vee \overline{P})) \& ((\overline{Q} \to P) \vee Q)$; $((P \& \overline{Q}) \to Q) \to (P \to Q)$;

$P \& (Q \& (\overline{P} \vee \overline{Q})$; $((P \to Q) \to Q) \to Q$;

$((P \& \overline{Q}) \to Q) \& (\overline{P} \vee Q)$.

2 Доказать выполнимость ФАВ.

$\neg(P \to \overline{P})$; $(P \to Q) \to (Q \to P)$;

$(Q \to (P \& R)) \& \neg((P \vee R) \to Q)$; $\neg((P \leftrightarrow \overline{Q}) \vee R) \& Q$;

$(P \& Q) \to ((R \vee Q) \to (Q \& \overline{Q}))$.

3 Доказать опровержимость ФАВ.

$((X \to (Y \& Z)) \to (\overline{Y} \to \overline{X})) \to \overline{Y}$;

$((X \vee Y) \vee Z) \to ((X \vee Y) \& (X \vee Z))$;

$((X \vee Y) \& ((Y \vee Z) \& (X \vee Z))) \to ((X \& Y) \& Z)$;

$(X \& Y) \vee (X \& Z) \vee (Y \vee Z) \vee (U \& V) \vee (U \& W) \vee (V \& W) \vee (\overline{X} \& \overline{U})$;

$(X \vee Y) \to ((\overline{X} \vee Y) \vee (X \& \overline{Y}))$.

4 Доказать. Если $\succ F$ и $\succ F \to G$, то $\succ G$.

5 Доказать: Если $\succ F \vee G$ и $\succ \overline{F} \vee H$, то $\succ G \vee H$.

6 Доказать. Если $\succ F \vee G$, $\succ F \to H$, $\succ G \to K$ то $\succ H \vee K$.

7 Доказать. Если $\succ \overline{F} \vee G$, $\succ \overline{G} \vee \overline{H}$, то $\succ F \to \overline{H}$.

8 Доказать. Если $\succ F$, $\succ F \leftrightarrow G$, то $\succ G$.

9 Доказать. Если $F \succ G$ тогда и только тогда, когда $\succ F \to G$.

10 Доказать, что “$F \succ G$”, более сильно, чем “Если $\succ F$, то $\succ G$”.

11 Доказать, что из “Если $\succ F$, то $\succ G$” не следует “$F \succ G$”.

12 Доказать выводимости.

$P \succ P$;

$(P \to Q) \& (Q \to R) \succ P \to R$;

$(P \to Q) \succ (Q \to R) \to (P \to R)$;

$(P \to Q) \to R \succ (P \to Q) \to (P \to R)$;

$P \to (Q \to R) \succ Q \to (P \to R)$;

$P \to Q \succ (\overline{Q} \to \overline{P})$;

$\overline{P} \succ (P \to Q)$;

$P \to (Q \to R) \succ (P \& Q) \to R$;

$P \to Q \succ (P \vee R) \to (Q \vee R)$;

$P \to Q \succ (P \& R) \to (Q \& R)$.

13 Доказать. $F, \overline{G} \succ P \& \overline{P} \Rightarrow F \succ G$.

14 Доказать или опровергнуть. Если $F \succ G \to H$ тогда и только тогда, когда $F, \overline{G} \succ H$.

15 Методом от противного определить справедливость выводимостей.

$F \to G, K \to \overline{H}, H \vee \overline{G} \succ F \to \overline{K}$;

$F \to G, ((F \vee L) \& H) \to M, L \to H \succ ((F \vee L) \& G) \to \overline{M}$;

$(F \& G) \to \overline{R}, (F \& H) \to K, F \to K, (F \& \overline{G}) \to H \succ F \to \overline{R}$.

16 Определить справедливость выводимостей.

$F \to G, \overline{K} \to \overline{L}, S \to H, \overline{F} \to \overline{K}, H \to L \succ S \to G$;

$(F \& G) \to H, (H \& K) \to L, \overline{M} \to (K \& L) \succ (F \& G) \to M$;

$F \to (G \& H), (M \& K) \to L, \overline{M} \to (K \& L) \succ (F \& G) \to M$;

$F \to (G \& H), (M \& K) \to L, \overline{M} \to (K \& \overline{L}) \succ F \to (G \to M)$;

$(F \& G) \to (H \& K), (K \vee L) \to M \succ F \to M$;

$F \to (G \& H), \overline{G} \vee K, (L \to \overline{M}) \to \overline{K}, G \to (F \& \overline{L}) \succ G \to L$;

$(F \to G) \& (H \to K), (G \to L) \& (K \to M), \neg(L \& M), F \to H \succ \overline{F}$.

17 Доказать: $F \equiv G \Leftrightarrow F \leftrightarrow G$.

18 Доказать.

$P \& (Q \vee P) \equiv P$;

$P \vee (Q \& P) \equiv P$;

$P \to Q \equiv \overline{P} \vee Q$;

$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \& (Q \to P)$;

$\neg(P \& Q) \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}$;

$\neg(P \vee Q) \equiv \overline{P} \& \overline{Q}$.

19 Упростить.

$\neg(\overline{P} \vee Q) \to ((P \vee Q) \to P)$;

$\neg(\overline{P} \& \overline{Q}) \vee ((P \to Q) \& P)$;

$(P \to Q) \& (Q \to P) \& (P \vee Q)$;

$(P \to Q) \& (Q \to \overline{P}) \& (R \to P)$;

$(P \& R) \vee (P \& \overline{R}) \vee (Q \& R) \vee (\overline{P} \& Q \& R)$;

$\neg((P \to Q) \& (Q \to \overline{P}))$.

20 Преобразовать, сохранив $\neg$ и $\&$.

$(X \vee Y) \to (\overline{X} \to Z)$;

$(\overline{X} \to Y) \vee (\overline{X \to Y})$;

$((X \vee Y \vee Z) \to X) \vee Z$;

$((X \to Y) \to Z) \to \overline{X}$;

$(X \vee (Y \to Z)) \to X$.

21 Преобразовать, сохранив $\neg$ и $\vee$.

$(X \to Y) \to (Y \& Z)$;

$(\overline{X} \& \overline{Y}) \to (X \& Y)$;

$((\overline{X} \& \overline{Y}) \vee Z) \to (Z \& \overline{Y})$;

$((X \to (Y \& Z)) \to (\overline{Y} \to \overline{X})) \to \overline{Y}$;

$((X \to Y) \& (Y \to Z)) \to (X \to Z)$.

22 Преобразовать, сохранив $\neg$ над переменными.

$\neg((X \& (\overline{Y} \vee \overline{Z})) \vee Z)$;

$\neg((X \& Y) \vee \overline{Z}) \to \overline{X \& Z}$;

$\neg(U \to \neg(Z \& \neg(Y \& \overline{X})))$;

$\neg(\neg(\neg(X \& Y) \to Y) \to (\overline{X} \& Z))$;

$\neg(\neg(X \vee (\overline{Y} \& Z) \to Y) \to (\overline{X} \& Z))$;

$\neg(\neg(X \vee (\overline{Y} \& Z) \vee \overline{Z}) \vee (Y \& Z))$.

23 Преобразовать, сохранив $\neg$, $\&$ и $\vee$.

$((X \to Y) \& (Y \to X)) \to (X \vee Y)$;

$((X \to Y) \& (Y \to \overline{X})) \to (Z \to X)$;

$((X \leftrightarrow Y) \& (\overline{X} \to \overline{Y})) \to ((X \vee Y) \& (\overline{X} \vee \overline{Y})$;

$((X \leftrightarrow \overline{Y}) \to Z) \to (X \leftrightarrow Z)$;

$(X \to (Y \leftrightarrow Z)) \leftrightarrow ((X \to Y) \leftrightarrow Z)$.

24 Упростить, доказать противоречия.

$(X \to Y) \& (Y \to X) \& ((X \& \overline{Y}) \vee (\overline{X} \& Y))$;

$((X \& \overline{Y}) \to (\overline{X} \vee (X \& Y))) \& ((\overline{X} \vee (X \& Y)) \to (X \& \overline{Y}))$;

$((X \to Y) \& (Y \to Z)) \to \overline{X \to Z}$;

$(X \to Y) \& (X \to \overline{Y}) \& X$;

$((X \& \overline{Y}) \vee (X \& \overline{Z})) \leftrightarrow ((X \to Y) \& (X \to Z))$.

25 Упростить систему высказываний.

$C \to (A \vee B)$, $(B \& C) \to A$, $(A \& B) \to C$;

$A \to (B \vee C)$, $B \to (A \vee C)$, $(A \& B) \to C$;

$A \to B$, $A \to (B \vee C)$, $B \to C$;

$P \to (Q \vee R)$, $W \to (S \vee T)$, $R \to (Q \vee \overline{P})$, $(W \& T) \to S$;

$W \to (M \vee S)$, $R \to T$, $\overline{Q} \to T$, $M \to (S \vee W)$, $P \to (T \vee R)$;

$\overline{A} \to (B \vee C)$, $B \to \overline{A \& C}$, $C \to (A \vee \overline{B})$ $A \to (B \vee C)$

$(A \& C) \to B$, $(\overline{A} \& \overline{B}) \to C$.

26 Упростить систему высказываний, относительно которых известно, что хотя бы одно из них истинно.

$A \& B \& \overline{C}$, $\overline{A \to B} \& \overline{C}$, $\overline{A} \& \overline{B \to C}$;

$\overline{A \to B}$, $\overline{B} \& A$; $\overline{B} \& C$, $\overline{C \to A}$.

27 Упростить систему высказываний, относительно которых известно, что хотя бы одно из них ложно.

$A \to B$, $A \to C$, $B \to (A \& C)$.

1.6 ЗАДАЧИ II

1 Равносильными преобразованиями привести СДНФ формулы.

$(\overline{X} \vee Z) \& (Y \vee Z)$;

$(X \& Y) \vee (Y \& Z)$;

$X \vee (Y \& Z)$;

$(X \& Y) \vee (Z \& T)$;

$((X \& \overline{Y}) \vee Z) \& (\overline{X} \vee Z)$;

$((X \vee Y) \& (X \vee Z)) \vee (\overline{Y} \& (Z \vee \overline{Y}))$.

2 Равносильными преобразованиями привести СДНФ формулы.

$X \vee Y \vee Z$;

$(X \vee Y \vee Z) \& (X \vee T) \& (Z \vee T)$;

$(X \& \overline{Y}) \vee (\overline{X} \& Y) \vee (X \& \overline{Z}) \vee (Y \& \overline{Z}) \vee (\overline{Y} \& Z)$;

$\overline{X} \vee (X \& Y) \vee (Y \& Z) \vee (Z \& T)$;

$X \vee Y \vee Z \vee S \vee T$.

3 Равносильными преобразованиями привести СКНФ формулы.

$(\overline{X} \& Z) \vee (Y \& Z)$;

$(X \vee Y) \& Z$;

$(\overline{X} \vee Y) \& X \& Z$;

$(\overline{X} \vee Y) \vee (Z \& T)$;

$(X \& Y \& Z) \vee T$;

$X \& Y \& Z$;

$(X \& Y) \vee (Y \& Z) \vee (Z \& T)$;

$(X \& Y) \vee Z$.

4 Равносильными преобразованиями привести ДНФ формулы.

$\overline{X \vee Z} \& (X \to Y)$;

$(X \leftrightarrow Y) \& \overline{Z \to T}$;

$(X \vee (Y \& \overline{Z})) \& (X \vee Z)$;

$((X \to Y) \to (Z \to \overline{X})) \to (\overline{Y} \to \overline{Z})$;

$(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to \overline{Z}) \to (X \to \overline{Y}))$.

5 Равносильными преобразованиями привести КНФ формулы задачи 4.

6 Равносильными преобразованиями привести СДНФ формулы.

$(\overline{X} \& Y) \vee (Y \& Z \& T) \vee (\overline{X} \& Y \& Z \& T)$;

$\neg((X \to Y) \to \overline{Y}) \to (X \to (Y \& X))$;

$\neg((X \& Y) \to \overline{X}) \& \overline{X \& Y) \to \overline{Y}}$.

7 Равносильными преобразованиями привести СКНФ формулы.

$(X \vee Y) \& (Y \vee Z) \& (Z \vee T)$;

$X \& (Y \& \overline{Z}) \& (X \vee Y \vee Z)$;

$\overline{X \& (Y \vee Z)} \to ((X \& Y) \vee Z)$.

8 Построить конъюнктивный моном для набора переменных:
(0,0); (0,1); (1,1); (0,1,1); (1,0,0); (,0,1,1).

9 Построить СДНФ для функций, заданных единичными наборами:

$F(0,0) = F(1,1) = 1$;

$F(1,0) = 1$;

$F(0,1,0) = F(1,0,1) = F(1,1,1) = 1$;

$F(0,1,1) = F(1,1,0) = 1$;

$F(1,0,0) = F(0,1,1) = F(0,0,1) = 1$;

$F(0,1,1) = F(1,0,1) = F(1,1,0) = F(1,1,1) = 1$;

$F(0,0,0) = F(0,1,0) = F(1,1,1) = 1$;

$F(0,1,0,1) = F(1,0,1,0) = F(1,0,0,0) = F(1,1,1,0) = F(1,1,1,1) = 1$.

10 Доказать, что выполнимой ФАВ существует единственная СДНФ.

11 Построить дизъюнктивный моном для набора переменных:
(0,0); (1,0); (1,1); (0,1,1); (1,0,1); (1,0,0,1); (0,1,0,0).

12 Построить СКНФ для функций, заданных нулевыми наборами:

$F(0,1) = F(1,1) = 0$;

$F(0,1) = 0$;

$F(0,1,1) = 0$;

$F(1,0,0) = F(1,0,1) = 0$;

$F(0,1,1) = F(0,0,0) = F(0,1,0) = 0$;

$F(1,1,1) = F(0,0,1) = F(1,1,0) = F(1,0,0) = 0$;

$F(0,0,0) = F(0,1,0) = F(1,1,1) = 0$;

$F(1,1,0,1) = F(0,0,1,0) = F(1,0,1,0) = F(0,0,1,1) = F(0,0,0,0) = 0$.

13 Доказать, что опровержимой ФАВ существует единственная СКНФ.

14 Получить СДНФ для ФАВ:

$\overline{X \& Y} \to \overline{X \vee Y}$;

$X \to Y$;

$(X \& Y) \vee Z$;

$(X \leftrightarrow Z) \to (X \& \overline{Y})$;

$X \vee (Y \to (Z \leftrightarrow (X \& Y)))$;

$((X \& \overline{Y}) \vee Z) \& T$;

$(X \& ((Y \& Z) \vee T)) \vee \overline{T})$.

15 Получить СКНФ для ФАВ:

$\overline{X \& Y} \to \overline{X \vee Y}$;

$X \leftrightarrow Y$;

$(X \vee Y) \& Z$;

$\overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} \& (X \to (Y \& Z))$;

$(X \& Y \& Z) \vee T$;

$(X \& \overline{\overline{Y} \& (Z \to (X \leftrightarrow Y))}$;

$(X \& Y) \vee (Y \& Z) \vee (Z \& T)$.

16 СКНФ ФАВ от трех переменных содержит 6 мономов.Что проще – СКНФ или СДНФ этой ФАВ?

17 Доказать, что отрицание ФАВ есть дизъюнкция тех и только тех совершенных конъюнктивных мономов, которые входя в СДНФ этой ФАВ.

18 Доказать, что отрицание ФАВ есть конъюнкция тех и только тех совершенных дизъюнктивных мономов, которые входя в СКНФ этой ФАВ.

19 Перейти от СДНФ к СКНФ:

$F = (\overline{X} \& \overline{Y} \& \overline{Z}) \vee (\overline{X} \& Y \& Z) \vee (X \& \overline{Y} \& Z) \vee (X \& Y \& \overline{Z}) \vee (X \& Y \& Z)$;

$F = (\overline{X} \& Y) \vee (X \& \overline{Y})$;

$F = (\overline{X} \& \overline{Y}) \vee (X \& Y)$;

$F = (\overline{X} \& \overline{Y} \& Z) \vee (X \& \overline{Y} \& \overline{Z}) \vee (\overline{X} \& Y \& \overline{Z}) \vee (\overline{X} \& Y \& Z) \vee (X \& Y \& \overline{Z})$;

$F = (\overline{X} \& \overline{Y} \& \overline{Z}) \vee (X \& Y \& Z)$;

$F = (\overline{X} \& \overline{Y} \& \overline{Z} \& \overline{T}) \vee (\overline{X} \& \overline{Y} \& Z \& \overline{T}) \vee (\overline{X} \& Y \& \overline{Z} \& \overline{T}) \vee$

$\vee (X \& \overline{Y} \& \overline{Z} \& \overline{T}) \vee (\overline{X} \& \overline{Y} \& \overline{Z} \& T) \vee (X \& Y \& Z \& T)$

с

$F = (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \& (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \& (\overline{X} \vee Y \vee Z) \& (X \vee Y \vee Z)$;

$F = (\overline{X} \vee Y \vee Z) \& (X \vee \overline{Y} \vee Z) \& (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$;

$F = (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z} \vee \overline{T}) \& (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z} \vee \overline{T}) \& (X \vee \overline{Y} \vee Z \vee T) \&$

$\& (X \vee Y \vee \overline{Z} \vee T) \& (X \vee Y \vee Z \vee \overline{T}) \& (X \vee Y \vee Z \vee T)$

21 Найти простейшую ФАВ от трех переменных, последний столбец таблицы истинности которой имеет вид:

а) 00001111; б) 01010101; в) 00100100; г)10111101; д) 11000010.

22 Найти простейшую ФАВ от трех переменных, которая принимает значений 1 тогда и только тогда, когда точно две ее переменные принимают значение 1.

23 Найти простейшую ФАВ от трех переменных, которая принимает значений 1 тогда и только тогда, когда точно две ее переменные принимают значение 0.

24 Найти ФАВ $F(X,Y)$, чтобы следующая ФАВ была тождественно истинной:

$$((F\,\&\,Y)\to\overline{X})\to((X\to\overline{Y})\to F);$$

$$((F\,\&\,Y)\to\overline{X})\to((X\to Y)\to F).$$

25 Найти ФАВ $F(X,Y,Z)$, чтобы:

$$((Z\to(\overline{Y}\,\&\,X))\to F)\to(F\,\&\,(X\to Y)\,\&\,Z).$$

26 Найти ФАВ $F(X,Y,Z)$, чтобы:

а) $X\,\&\,F\equiv X\,\&\,Y$ и $X\vee F\equiv X\vee Z$;

б) $X\to F\equiv Y\to(\overline{X}\vee Z)$ и $F\to Z\equiv\overline{X\,\&\,Y}\to Z$;

в) $X\to F\equiv Y\to(\overline{X}\vee Z)$ и $(Z\to Y)\to X\equiv\overline{X}\to\overline{F}$.

27 Найти неравносильные между собой не тождественно истинные ФАВ, являющиеся следствием следующих посылок:

а) $X\to(Y\vee Z)$ и $Z\to Y$;

б) $X\to Y$ и X;

в) $X\to Y$ и $\overline{Y}$;

г) $X\leftrightarrow Y$ и $\overline{X}$;

д) $X\to\overline{Y}$, X и $\overline{Y}$;

е) $X\to Y$ и $Y\to Z$.

28 Для условия 27:

ж) $X\leftrightarrow Y$ и $Y\leftrightarrow Z$;

з) $(X\,\&\,Y)\to\overline{Z}$, X и $\overline{Y}$;

и) $(X\,\&\,Y)\to Z$ и $Y\to X$;

к) $X\to Y$, $Y\vee Z$ и $(X\,\&\,Y)\leftrightarrow Z$;

л) $(X\,\&\,Y)\to\overline{Z}$, Y и Z.

29 Найти ФАВ $F(X,Y)$, зависящую только от переменных X и Y и являющуюся логическим следствием указанных посылок:

а) $X \to Z$, $\overline{Z} \to \overline{Y}$, $Y \to V$ и $\overline{Z} \& V$;

б) $\overline{X} \& Z$, $\overline{Z} \& \overline{Y}$, $Y \to X$;

в) $X \to Z$, $Y \leftrightarrow \overline{V}$, $Z \to V$.

30 Для условия 29:

г) $X \& Y \& \overline{Z}$, $X \vee V$, $Z \leftrightarrow \overline{Y}$ и $X \to Z$;

д) $\overline{X} \vee Z$, $Y \to \overline{Z}$, $V \to (Y \& Z)$ и $V \vee X$.

31 Найти следствие из посылок $(\overline{X} \& Y) \vee Z$, $\overline{X \& Y}$, $Y \to (X \vee \overline{Z})$, содержащее только переменные:

а) X и Z; б) Y и Z.

32 Найти следствие из посылок $X \vee Y$, $X \to Z$, $Y \leftrightarrow V$, содержащее только переменные:

а) X и V; б) Y, Z и V.

33 Найти следствие из посылок $X \to (Y \vee Z)$, $V \vee \overline{Y}$, $(X \vee \overline{W}) \to V$, $W \to X$ содержащее только от переменные V, W и Z.

34 Найти следствие из посылок $X \to Y$, $V \to \overline{Y}$, $(X \vee \overline{W}) \to V$, $W \to X$ содержащее только от переменные

а) X и Z; б) Y, X и V.

35 Найти все неравносильные между собой и не тождественно ложные ФАВ, для которых следующая ФАВ является логическим следствием (за исключением самой данной формулы):

а) $X \leftrightarrow Y$; б) $X \to Y$, в) $X \vee \overline{Y}$; г) $\overline{X \vee Y}$, д) $(X \vee Y) \to (X \& Y)$.

36 Найти недостающую посылку (ФАВ) F, зависящую лишь от указанных пропозициональных переменных так, чтобы была верна следующая выводимость:

а) $X \vee Y \vee Z$, $\overline{Y} \& V$, $F(Z,V) \succ X \& Y$;

б) $X \to Z$, $Y \leftrightarrow V$, $F(Z,V) \succ \overline{X} \vee \overline{Y}$;

в) $X \vee \overline{Z}$, $Y \to (X \& Z)$, $F(X,Y) \succ \overline{Y} \vee \overline{Z}$;

г) $X \to Z$, $\overline{Y} \vee \overline{Z}$, $Z \to (Y \vee V)$, $F(X,Y) \succ X \& \overline{V}$;

д) $Y \to \overline{Z}$, $(X \vee Z) \to (Y \& V)$, $F(X,Y) \succ X \to \overline{V}$;

е) $\overline{X} \& Y$, $F(X,Y,Z) \succ Z$.

37 Найти все ФАВ, зависящие от переменных X, Y и являющиеся посылками для формул а) X; б) $\overline{X}$.

38 Найти все посылки (ФАВ), зависящие от переменных X, Y и Z для ФАВ:

$(X \to Z) \& (Z \to X) \& X$;

$(X \leftrightarrow Y) \& \overline{Y}$;

$X \& Y$.

1.7 ЗАДАЧИ III
ОБРАТНАЯ И ПРОТИВОПОЛОЖНАЯ ТЕОРЕМЫ

Пример формализации логического вывода.

Если верно, что *после снегопада крыша становится белой*, то справедливо также и следующее утверждение: *если крыша не белая, то снегопада не было.*

Обозначим буквой S утверждение «*снегопад был*», буквой B - «*крыша белая*». Тогда утверждение о том, что «*после снегопада крыша становится белой*», запишется в виде формулы $S \to B$. Утверждение «*если крыша не белая, то снегопада не было*» запишется иак: $\overline{B} \to \overline{S}$.

То, что из первого утверждения следует второе (т.е. всегда, когда истинно первое утверждение , истинным является второе), записывается как логическое следование: $(S \to B) \Rightarrow (\overline{B} \to \overline{S})$, что эквивалентно тому, что формула $(S \to B) \to (\overline{B} \to \overline{S})$ является тавтологией.

Докажем , что эта формула тождественно истинна (тавтология). Это можно сделать с помощью таблицы истинности или с помощью эквивалентных преобразований:

$$(S \to B) \to (\overline{B} \to \overline{S}) \;\Leftrightarrow\; \overline{S \to B} \vee (\overline{\overline{B}} \to \overline{S}) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (S \& \overline{B}) \vee (B \vee \overline{S}) \;\Leftrightarrow\; (S \vee B \vee \overline{S}) \& (\overline{B} \vee B \vee S) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; true \& true \;\Leftrightarrow\; true$$

Если в этом примере интерпретировать S и B по-другому, рассуждение останется логически верным.

Пример формализации логического рассуждения.

Выясним, является ли следующее утверждение логически правильным.

1 Если строить противоатомные убежища (A), то другие государства будут чувствовать себя в опасности (B), а наш народ получит ложное представление о своей безопасности (C).

2 Если другие страны будут чувствовать себя в опасности (E), то они могут начать превентивную войну (D).

3 Если наш народ получит ложное представление о своей безопасности (C), то он ослабит свои усилия, направленные на сохранение мира (E).

4 Если не строить противоатомные убежища $(\overline{A})$, то мы рискуем иметь колоссальные потери в случае войны (F).

5 Следовательно, либо другие страны могу начать превентивную войну (D), и наш народ , либо ослабит свои усилия, направленные на сохранение мира (E), либо мы рискуем иметь колоссальные потери в случае войны (F).

Каждое элементарное высказывание заменим пропозициональным символом (они стоят в скобках). Составим форму, соответствующую посылкам и следствию.

1 $A \to (B \& C)$ 3 $C \to E$ 5 $(D \& E) \vee F$

2 $B \to D$ 4 $\overline{A} \to F$

Надо доказать

$$\{A \to (B \& C), B \to D, C \to E, \overline{A} \to F\} \Rightarrow (D \& E) \vee F,$$

т.е. формула

$$(A \to (B \& C)) \& (B \to D) \& (C \to E) \& (\overline{A} \to F) \to (D \& E) \vee F$$

является тавтологией.

Преобразуем формулу:

1 Заменим импликацию на дизъюнкцию

$$\overline{(\overline{A} \vee (B \& C)) \& (\overline{B} \vee D) \& (\overline{C} \vee E) \& (A \vee F)} \vee (D \& E) \vee F.$$

2 Воспользуемся законами $\overline{P \& Q} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}$ и $\overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \& \overline{Q}$:

$$(A \& (\overline{B} \vee \overline{C})) \vee (B \& \overline{D}) \vee (C \& \overline{E}) \vee (\overline{A} \& \overline{F}) \vee ((D \& E) \vee F).$$

3 Воспользуемся законом $(P \& (Q \vee R)) \equiv ((P \& Q) \vee (P \& R))$

$$(A \& \overline{B}) \vee (A \& \overline{C}) \vee (B \& \overline{D}) \vee (C \& \overline{E}) \vee (\overline{A} \& \overline{F}) \vee (D \& E) \vee F.$$

Предположим, что формула ложна, следовательно все дизъюнкты должны быть ложны, следовательно F должно быть ложно, но тогда A должно быть истинно (т.к. $\overline{A} \& \overline{F}$ ложно), следовательно, B должно быть истинно (т.к. $A \& \overline{B}$ ложно), следовательно, C ложно ($C \& \overline{E}$ ложно), но если C ложно, то A должно быть ложно ($A \& \overline{C}$ ложно). Получили противоречие A должно быть истинно и A должно быть ложно, что доказывает, что формула не может быть ложной и, следовательно, она всегда истинна, т.е. является тавтологией. Отсюда рассуждение является верным.

1 Сформулируйте утверждения, обратные следующим теоремам:

а) Если последовательность рациональных чисел сходится, то она фундаментальна (т. е. является последовательностью Коши).

б) Если последовательность сходится, то она ограничена.

в) Если треугольник равнобедренный, то углы при его основании равны.

г) Если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

д) Если параллелограмм — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

е) Точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

ж) В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

з) Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.

и) Если каждое слагаемое является четным числом, то и сумма — четное число.

к) Если в четырехугольник можно вписать окружность, то этот четырехугольник — ромб.

л) Если свободный член c квадратного уравнения $ax^2 + bx + x = 0$ ($a \neq 0$) равен нулю, то один из корней этого уравнения равен нулю.

Какие из обратных утверждений истинны, т. е. являются теоремами?

2 Сформулируйте предложения, противоположные теоремам, приведенным в задаче 1. Какие из этих предложений верны, т. е. сами являются теоремами? Сопоставьте ответы на этот вопрос с ответами на второй вопрос задачи 1.

Совпадают ли они? (Если какие-нибудь два ответа не совпадают, то один из них неверен.)

3 Для каждой теоремы из задачи 1 сформулируйте теорему, равносильную ей согласно закону контрапозиции, т. е. теорему, обратную противоположной.

4 Пользуясь законом контрапозиции, докажите следующие теоремы:

а) Если mn — нечетное число, то m и n нечетны (m и n — целые числа).

б) Если значение выражения $\frac{2t}{t^2+1}$ иррациональное число, то t иррационально.

в) Если $a^2+b^2 \neq 0$, то $a \neq 0$ или $b \neq 0$.

г) Если две прямые порознь параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

д) Если две параллельные прямые пересечены третьей, то внутренние накрест лежащие углы равны.

е) Среди простых чисел нет наибольшего.

5 Для каждой из следующих теорем найдите все теоремы, т. е. верные утверждения, обратные и противоположные ей (если они есть), и теорему, противоположную обратной:

а) Если $a=0$ и $b=0$, то $a^2+b^2=0$ (a, b — действительные числа).

б) Если a делится на b и b делится на c, то a делится на c (a, b, c — целые числа).

в) Если ab делится на c и a не делится на c, то b делится на c (a, b, c — целые числа).

г) Если a делится на c и b делится на c, то $a+b$ делится на c (a, b, c — целые числа).

д) Если два угла вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу, то они равны между собой.

е) Если у четырехугольника две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

ж) Если две хорды принадлежат равным кругам и равны между собой, то они одинаково удалены от центров этих кругов.

з) Если плоскость α перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

6 Составив таблицы истинности для обратных форм (формул), рассмотренных в решении предыдущей задачи: $Y \to (X_1 \,\&\, X_2)$, $(X_1 \,\&\, Y) \to X_2$, $(X_2 \,\&\, Y) \to X_1$, $(X_1 \to Y) \to X_2$, $(X_2 \,\&\, Y) \to X_1$, определите, какие из этих форм являются логическими следствиями и каких форм.

7 Для каждой из следующих теорем найдите все обратные и противоположные теоремы (если они есть), а также теорему, противоположную обратной:

а) Если три прямые лежат в одной плоскости и две из них перпендикулярны третьей, то эти две прямые параллельны.

б) Если прямая a, лежащая вне плоскости α, параллельна прямой b, лежащей в плоскости α, то прямая a и плоскость α параллельны.

в) Если прямая a лежит в одной из двух пересекающихся плоскостей и параллельна другой из них, то она параллельна и линии их пересечения.

г) Если прямая a пересекает плоскость α и перпендикулярна двум непараллельным прямым b и c, принадлежащим этой плоскости, то прямая a перпендикулярна плоскости α.

д) Если отрезки параллельных прямых заключены между параллельными прямыми, то они равны между собой.

8 Для каждой из следующих теорем найдите все обратные и противоположные теоремы, а также теорему, противоположную обратной:

а) Если целое число делится на 12, то оно делится и на 3, и на 4.

б) Если прямоугольник является квадратом, то его диагонали взаимно перпендикулярны и делят углы пополам.

в) Если параллелограмм является квадратом, то его диагонали равны, взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам.

г) Если пирамида рассечена плоскостью, параллельной основанию, то ее боковые ребра и высота делятся этим сечением на пропорциональные части, при этом сечением является многоугольник, подобный основанию, а площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний до вершины.

9 Составьте все теоремы, обратные и противоположные следующим:

а) Всякий параллелограмм с равными диагоналями есть прямоугольник или квадрат.

б) Всякий параллелограмм с взаимно перпендикулярными сторонами есть ромб или квадрат.

в) Если четырехугольник вписывается в окружность, то он правильный или суммы его противоположных углов равны.

10 Установите логическую форму следующих теорем и найдите все обратные и противоположные им теоремы:

а) Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно параллельны, то они попарно равны.

б) Если прямая параллельна линии пересечения двух плоскостей, то она параллельна каждой из этих плоскостей.

в) Плоскость α и лежащая вне ее прямая a параллельны, если существует прямая, лежащая в плоскости α и параллельная прямой a.

г) Если существует прямая, принадлежащая одной из двух пересекающихся плоскостей и перпендикулярная другой, то эти плоскости перпендикулярны.

д) Прямая a перпендикулярна плоскости α, если a пересекает α и существуют две непараллельные прямые, лежащие в плоскости α и перпендикулярные прямой a.

ПРИНЦИП ПОЛНОЙ ДИЗЪЮНКЦИИ

11 Имеются три следующие теоремы: «Во всяком треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол; 2) против равных сторон лежат равные углы; 3) против меньшей стороны лежит меньший угол». Примените принцип полной дизъюнкции (т. е. теорему об обратимости системы импликаций) для доказательства того, что обратные теоремы для всех трех данных теорем верны.

12 Даны три теоремы: «Во всяком треугольнике: 1) квадрат стороны, лежащей против острого угла, меньше суммы квадратов двух его сторон; 2) квадрат стороны, лежащей против прямого угла, равен сумме квадратов двух других его сторон; 3) квадрат стороны, лежащей против тупого угла, больше суммы квадратов двух других его сторон». Примените теорему об обратимости системы импликаций для доказательства того, что обратные утверждения для данных теорем также верны, т. е. являются теоремами. Сформулируйте их.

13 Даны теоремы: «В одном и том же круге или в равных кругах: 1) большая хорда ближе к центру; 2) равные хорды одинаково удалены от центра; 3) меньшая хорда дальше отстоит от центра». Покажите, как применяется теорема об обратимости системы импликаций для

доказательства того, что обратные утверждения также верны. Сформулируйте обратные теоремы.

14 Сформулируйте обратные теоремы к следующим трем теоремам: «Для положительного числа a:

1) если $b < c$, то $ab < ac$;

2) если $b = c$, то $ab = ac$;

3) если $b > c$, то $ab > ac$.

Нуждаются ли обратные теоремы в доказательстве? Ответ обоснуйте.

15 Приведите примеры математических теорем, для которых обратные утверждения оказываются верными на основе теоремы об обратимости системы импликаций

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

16 Сформулируйте следующие высказывания, используя связку «если ..., то...»:

а) A достаточно для B;

б) A необходимо для B;

в) B достаточно для A,

г) B необходимо для A.

17 Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если..., то...»:

а) Для делимости произведения на некоторое число достаточно, чтобы по меньшей мере один из сомножителей делился на это число.

б) Необходимым свойством прямоугольника является равенство его диагоналей.

в) Для делимости многочлена $f(x)$ на линейный двучлен $x - a$ достаточно, чтобы a было корнем этого многочлена.

г) На *5* делятся те целые числа, которые оканчиваются цифрой *0* или цифрой *5*.

д) Две прямые на плоскости тогда параллельны, когда они перпендикулярны одной и той же прямой.

е) Комплексные числа равны, только если равны соответственно их действительные и мнимые части.

ж) Всякое квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет не более двух действительных корней.

з) Из того, что четырехугольник — ромб, следует, что каждая из его диагоналей служит осью симметрии.

и) Четность суммы есть необходимое условие четности каждого слагаемого.

к) Равенство треугольников есть достаточное условие их равновеликости.

л) Для того чтобы функция была дифференцируемой в точке, необходимо, чтобы она была непрерывной в этой точке.

18 Определите, какие из следующих высказываний истинны и какие ложны:

а) Наличие аттестата зрелости достаточно для поступления в институт.

б) Наличие аттестата зрелости необходимо для поступления в институт.

в) Периодичность — достаточное условие всякой тригонометрической функции.

г) Периодичность — необходимое свойство всякой тригонометрической функции.

д) Непрерывность — необходимое и достаточное свойство всякой тригонометрической функции.

е) Для существования действительного логарифма числа необходимо и достаточно, чтобы это число было действительным и положительным.

ж) Для того чтобы натуральное число p было простым, необходимо и достаточно, чтобы число $p+1$ было четным.

з) Для того чтобы медиана треугольника была равна половине стороны, которую она делит пополам, необходимо и достаточно, чтобы треугольник был прямоугольным.

и) Для того чтобы четырехугольник был квадратом, достаточно, чтобы его диагонали были равны и перпендикулярны.

к) Для того чтобы в прямоугольном треугольнике катет составлял половину гипотенузы, необходимо и достаточно, чтобы угол, лежащий против этого катета, был равен 30°.

л) Дифференцируемость функции в точке есть необходимое условие для ее непрерывности в этой точке.

Указание. Прежде чем отвечать на вопрос, непременно сформулируйте теорему с использованием связки «если..., то ...», выделив условие и заключение.

19 В следующих высказываниях вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо, но не достаточно», «достаточно, но не

необходимо», «необходимо и достаточно» — так, чтобы получилось истинное высказывание:

а) a — четное число... для того, чтобы $3a$ было четным числом (a — целое число).

б) a делилось на c … для того, чтобы ab делилось на c (a, b, c — целые числа).

в) a и b делятся на c ... для того, чтобы $a+b$ делилось на c (a, b, c — целые числа).

г) $x>1$ ... для того, чтобы $x^2-1>0$.

д) $a \parallel b$ и $b \parallel c$ ... для того, чтобы $a \parallel c$ (a, b, c — прямые).

е) Совпадение центров вписанной и описанной около треугольника окружностей ... для того, чтобы треугольник был правильным.

ж) $\alpha=\beta$ ... для того, чтобы $\sin\alpha=\sin\beta$.

з) Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, ..., чтобы его диагонали были равны.

и) Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, ..., чтобы все его стороны были равны.

к) Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, ..., чтобы все его углы были равны.

л) Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, ..., чтобы его диагонали в точке пересечения делились пополам.

Указание. В задаче 19, з, и, к, л имеется в виду выпуклый четырехугольник.

20 Даны утверждения:

A: «Треугольник равнобедренный»;

B: «Два внутренних угла треугольника равны между собой»;

C: «Три внутренних угла треугольника равны между собой»;

D: «Два внешних угла треугольника равны между собой»;

E: «Две высоты треугольника равны между собой»;

K: «Три высоты треугольника равны между собой»;

L: «Один из углов треугольника равен 45°».

а) Какие из перечисленных утверждений и из каких логически следуют? Составьте из соответствующих пар истинные условные высказывания.

б) Какие из утверждений *B* — *L* служат для утверждения *A* достаточными условиями; необходимыми; необходимыми и достаточными условиями одновременно?

21 Даны утверждения:

A: «Пирамида правильная»;

B: «Все боковые ребра пирамиды равны между собой»;

C: «Высоты всех боковых граней пирамиды равны между собой»;

D: «Проекция каждого из боковых ребер пирамиды на основание есть биссектриса соответствующего угла основания»;

E: Вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание».

а) Какие из перечисленных утверждений и из каких логически следуют? Составьте из соответствующих пар истинные условные высказывания.

б) Какие из утверждений *A* — *D* являются для утверждения *E* достаточными условиями; необходимыми; необходимыми и достаточными условиями одновременно?

22 Используя слова: 1) всякие; 2) если..., то ...; 3) только если; 4) необходимо; 5) достаточно; 6) те, которые; 7) только те, которые; 8) тогда, когда; 9) только тогда, когда; 10) если нет..., то нет... (без... нет...); 11) содержится, сформулируйте следующие теоремы:

а) Вертикальные углы равны.

б) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны

в) Равные треугольники подобны.

г) Если целое число делится на *6*, то оно делится на *3*.

д) Точка пересечения диагоналей параллелограмма есть центр его симметрии.

е) Невырожденная матрица имеет обратную матрицу.

23 Каждое из следующих высказываний сформулируйте в форме равнозначности (с использованием связки «... тогда и только тогда, когда ...»):

а) Перпендикуляр, проведенный к отрезку через его середину, есть геометрическое место точек, равноудаленных от концов этого отрезка.

б) Две прямые, параллельные данной прямой и находящиеся по разные стороны от нее на расстоянии *r,* есть геометрическое место центров окружностей радиуса *r,* касающихся данной прямой в данной плоскости.

в) При прибавлении одного и того же числа *m* к обеим частям уравнения $f(x)-g(x)$ получаем новое уравнение, имеющее те же корни, что и исходное, и не имеющее никаких других корней.

г) При умножении обеих частей данного неравенства $f(x)-g(x)$ на одно и то же положительное .число *m* получаем неравенство

того же смысла, обладающее тем же самым множеством решений, что и исходное неравенство.

24 Руководствуясь определением импликации (таблицей истинности этой операции), сформулируйте:

а) достаточное, но не необходимое условие истинности импликации;

б) необходимое, но не достаточное условие ложности импликации;

в) необходимое и достаточное условие ложности импликации;

г) необходимое и достаточное условие истинности импликации.

25 Используя только законы алгебры высказываний, выясните, какие из приведенных ниже высказываний следуют из высказывания: «Если целое число n делится на *6*, то n делится на *3*»:

а) Чтобы n делилось на *3*, достаточно, чтобы оно делилось на *6*.

б) Чтобы n делилось на *6*, достаточно, чтобы оно делилось на *3*.

в) Чтобы n не делилось на *3*, необходимо, чтобы n не делилось на *6*.

г) Число n делится на *6* тогда и только тогда, когда оно делится на *3*.

д) Число n делится на *3* тогда и только тогда, когда оно делится на *6*.

26 На основе законов алгебры высказываний выясните, какие из приведенных ниже высказываний будут истинны: если истинно высказывание: «Равные треугольники подобны»,

а) Треугольники равны только в случае их подобия.

б) Подобие треугольников является необходимым условием их равенства.

в) Треугольники подобны только в случае их равенства.

г) Равенство треугольников является достаточным условием их подобия.

д) Подобие треугольников является необходимым и достаточным условием их равенства.

е) Для того чтобы треугольники были неравны, достаточно, чтобы они были неподобны.

Указание. Запишите данное высказывание символически: $A \to B$, обозначив через A высказывание «Треугольники равны» и через B «Треугольники подобны». Затем, используя эти обозначения, запишите символически каждое из предлагаемых высказываний и сравните полученную формулу с формулой, отражающей структуру данного истинного высказывания.

27 Пользуясь основными законами (тавтологиями) алгебры высказываний, докажите, что следующие составные высказывания истинны:

а) Действительное число a больше 2 или меньше -1 в том и только в том случае, когда из того, что a не больше 2, следует, что a меньше -1.

б) Если справедливо утверждение, что каждое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами нечетной степени имеет по меньшей мере один действительный корень, то справедливо и утверждение, что каждое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами, не имеющее действительного корня, имеет четную степень.

в) Два утверждения: «Система n линейных однородных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель системы отличен от нуля» и «Система линейных однородных уравнений с n неизвестными имеет по меньшей мере два решения тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю» — одновременно истинны или одновременно ложны.

г) Если справедливо, что дифференцируемая функция непрерывна, то невозможно, чтобы функция была дифференцируема и разрывна.

д) Если справедливо, что невырожденная матрица имеет обратную, то справедливо также, что матрица вырождается или имеет обратную.

УПРОЩЕНИЕ СИСТЕМ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

28 Администрация небольшого завода спешно дала в связи с неожиданным приходом инспектора следующие директивы по службе безопасности.

Должно выполняться по меньшей мере одно из следующих правил:

а) Инспектору не разрешается курить на заводе.

б) Если инспектору разрешается курить на заводе, то рабочие должны быть предупреждены об этом и бригадир должен принять меры к быстрому уничтожению окурков.

в) Рабочие должны быть предупреждены, или бригадир должен принять меры к быстрому уничтожению окурков.

г) Или рабочие должны быть предупреждены и бригадир должен принять меры к быстрому уничтожению окурков, или инспектору не разрешается курить на заводе.

Как можно упростить эти директивы?

29 Администрация морского порта издала следующие распоряжения:

а) Если капитан корабля получает специальное указание, то он должен покинуть порт на своем корабле.

б) Если капитан не получает специального указания, то он не должен покидать порта или он впредь лишается возможности захода в этот порт.

в) Капитан или лишается впредь возможности захода в этот порт, или не получает специального указания.

Как можно упростить эту систему распоряжений?

30 Командир осажденной крепости послал следующие три сообщения:

а) Если нам удастся получить продовольствие, то нам не будет угрожать смерть от голода.

б) Если нам не удастся получить продовольствие, то или нам будет угрожать смерть от голода, или мы попытаемся прорвать кольцо окружения.

в) Если нам будет угрожать смерть от голода, то мы попытаемся прорвать кольцо окружения.

Покажите, как можно сократить эти сообщения, не меняя их смысла.

31 На факультативном занятии по математической логике учитель сообщил школьникам VIII класса, собирающимся в туристский поход по родному краю, следующие сведения о готовящемся походе:

а) Будут приобретены новые палатки, новые рюкзаки, и VIII класс пойдет в поход.

б) Палатки и рюкзаки приобретаться не будут, и VIII класс в поход не пойдет.

в) Будут приобретены новые палатки, рюкзаки приобретаться не будут, VIII класс пойдет в поход.

г) Неверно, что либо будут приобретены новые палатки, либо не будут приобретены новые рюкзаки, либо VIII класс пойдет в поход.

Отметив, что по крайней мере одно из четырех сообщений абсолютно верно, он попросил их наилучшим образом упростить всю

полученную информацию и представить ее в виде одного простого условия.

ПРАВИЛЬНЫЕ И НЕПРАВИЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

32 Я пойду или в кино на новую кинокомедию *(A),* или на занятие по математической логике *(B).* Если я пойду в кино на новую кинокомедию, то я от всей души посмеюсь *(C).* Если я пойду на занятие по математической логике, то испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений *(D).* Следовательно, или я от всей души посмеюсь, или испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений.

Справедливо ли проведенное рассуждение?

33 Если цех *II* не будет участвовать в выпуске нового образца продукции, то не будет участвовать и цех *I*. Если же цех *II* будет участвовать в выпуске нового образца, то в этой работе непременно должны быть задействованы цеха *I* и *III*. Необходимо ли участие цеха *III*, если в выпуске нового образца будет участвовать цех *I*?

34 Если Антон ляжет сегодня поздно (*A*), то утром он будет в нерабочем состоянии *(B).* Если он ляжет не поздно, то ему будет казаться, что он много времени теряет бесполезно (*C*). Следовательно, или Антон завтра будет в нерабочем состоянии, или ему будет казаться, что он много времени теряет напрасно.

Справедливо ли такое заключение?

35 Если я пойду завтра на первое занятие (*A*), то должен буду рано встать *(B),* а если я пойду вечером на танцы (*C*), то лягу спать поздно *(D).* Если я лягу спать поздно и встану рано, то буду вынужден довольствоваться пятью часами сна *(E).* Я просто не в состоянии обойтись пятью часами сна. Следует ли отсюда, что я должен или пропустить завтра первое занятие, или не ходить вечером на танцы?

36 Если завтра будет холодно *(A),* то я надену теплое пальто *(B),* если рукав будет починен (*C*). Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Следует ли отсюда, что я не надену теплое пальто?

37 Андрей или переутомился *(A),* или болен *(B).* Если он переутомился, то он раздражается (*C*). Он не раздражается. Следует ли отсюда, что он не болен?

38 Если *2* — простое число (*A*), то *2* — наименьшее простое число *(B).* Если *2* — наименьшее простое число, то *1* не является простым числом (*C*). Число *1* не является простым числом. Следует ли

отсюда, что *2* — наименьшее простое число? Следует ли отсюда, что *2* — простое число?

39 Если выиграет куйбышевский «Спартак» (*A*), то Куйбышев будет торжествовать *(M).* Если же выиграет саратовский «Кристалл» *(B),* то торжествовать будет Саратов (*C*). Выиграет или «Спартак», или «Кристалл». Однако если выиграет «Спартак», то Саратов не будет торжествовать, а если выиграет «Кристалл», то торжествовать не будет Куйбышев. Вытекает ли отсюда, что Куйбышев будет торжествовать тогда и только тогда, когда не будет торжествовать Саратов?

40 Или Анна и Антон одного возраста (*A*), или Анна старше Антона *(B).* Если Анна и Антон одного возраста, то Наташа и Антон не одного возраста (*C*). Если Анна старше Антона, то Антон старше Николая (*D*). Следует ли отсюда, что либо Наташа и Антон не одного возраста, либо Антон старше Николая?

41 Если *6* — составное число *(A),* то *12* — составное число *(B).* Если *12* — составное число, то существует простое число больше чем *12* (*C*). Если существует простое число больше *12*, то существует составное число больше *12 (D).* Если *6* делится на *2* (*E*), то *6* — составное число. Число *12* составное. Следует ли отсюда, что *6* — составное число?

42 Если я поеду автобусом *(A),* а автобус опоздает *(B),* то я пропущу назначенное свидание (*C*). Если я пропущу назначенное свидание и начну огорчаться (*D*), то мне не следует ехать домой *(E).* Если я не получу работу *(P),* то я начну огорчаться и мне следует поехать домой. Следует ли тогда, что если я поеду автобусом и автобус опоздает, то я получу работу?

43 Если Сергей выиграет теннисный турнир (*A*), то он будет доволен *(B),* а если он будет доволен, то он плохой борец в последующих турнирах (*C*). Но если он проиграет этот турнир, то потеряет поддержку своих болельщиков *(D).* Он плохой борец в последующих турнирах, если потеряет поддержку своих болельщиков. Если он плохой борец в последующих турнирах, то ему следует прекратить занятия теннисом *(E).* Сергей или выиграет этот турнир, или проиграет его. Следовательно, ему нужно прекратить занятия теннисом.

Справедливо ли приведенное рассуждение с точки зрения логики?

НАХОЖДЕНИЕ ВСЕХ СЛЕДСТВИЙ ИЗ ПОСЫЛОК

44 Найдите все следствия из посылок: «Если сумма цифр целого числа делится на *3*, то это число делится на *3* или на *9*»; «Если целое число делится на *9*, то оно делится на *3*». Найденным следствиям придайте содержательный смысл.

45 Найдите все следствия из посылок и выразите их в содержательной форме: «Если последняя цифра целого числа четна, то число делится на *2* или на *4*»; «Если целое число делится на *4*, то оно делится на *2*».

Указание. Запишите посылки в виде формул алгебры высказываний и сравните их с посылками предыдущей задачи.

46 Найдите все следствия из посылок: «Если целое число делится на *2* и на *5*, то оно делится на *10*»; «Целое число делится на *2* и не делится на *5*». Выразите полученные следствия в содержательной форме.

Указание. Выразите посылки в виде формул алгебры высказываний и обратитесь к задаче 28, и.

47 Найдите все следствия из посылок: «Если у четырехугольника две противоположные стороны параллельны и они же равны, то этот четырехугольник — параллелограмм»; «У данного четырехугольника две противоположные стороны равны или параллельны».

Указание. См. задачу 28, з.

48 Какая связь между высказываниями «Данный четырехугольник — ромб» и «Данный четырехугольник — квадрат» логически следует из следующих четырех посылок: «Если данный четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны»; «Если диагонали данного четырехугольника не взаимно перпендикулярны, то он не является квадратом»; «Если данный четырехугольник — квадрат, то его можно вписать в окружность»; «Неверно, что данный четырехугольник имеет взаимно перпендикулярные диагонали или не может быть вписан в окружность»?

49 Из посылок предыдущей задачи найдите правильное заключение о связи между высказываниями: «Данный четырехугольник — ромб» и «Данный четырехугольник можно вписать в окружность».

Указание. См. Задачу 32.

50 Даны посылки: «Если целое число *n* больше *1*, то оно простое либо составное»; «Если целое число четное, то оно не простое»; «Если целое число больше *1* и не больше *2*, то оно четное»; «Если целое число *2*, то оно больше *1*». Из этих посылок найдите след-

ствие, связывающее высказывания: «Целое число больше *2*», «Целое число четное» и «Целое число составное».

Указание. Выразите посылки в виде формул алгебры высказываний и обратитесь к задаче 33.

51 Даны посылки: «Если данный четырехугольник — ромб, то его диагонали перпендикулярны»; «Если данный четырехугольник — квадрат, то его диагонали равны»; «Если диагонали данного четырехугольника не равны, то он не квадрат»; «Диагонали данного четырехугольника не перпендикулярны и равны». Найдите следствие из этих посылок, состоящее из высказываний:

а) «Данный четырехугольник — ромб» и «Данный четырехугольник — квадрат».

б) «Данный четырехугольник — ромб» и «Диагонали данного четырехугольника равны».

Указание. Выразите посылки.в виде формул алгебры высказываний и обратитесь к задаче 34.

НАХОЖДЕНИЕ ПОСЫЛОК ДЛЯ СЛЕДСТВИЙ

52 В следующем рассуждении найдите недостающую посылку, связывающую высказывания «Прямые *a* и *b* лежат в одной плоскости» и «Прямые *a* и *b* скрещиваются» так, чтобы рассуждение было правильным:

- Прямые *a* и *b* либо параллельны, либо пересекаются, либо скрещиваются.
- Прямые *a* и *b* лежат в одной плоскости и не пересекаются.
- ???

Следовательно, прямые *a* и *b* лежат в одной плоскости и параллельны.

53 В следующем рассуждении найдите недостающую посылку так, чтобы рассуждение было правильным и посылка выражала связь между высказываниями: «Целое число оканчивается нулем»; «Целое число делится на *5*»; «Целое число оканчивается цифрой *5*».

- Целое число делится на *5* и не оканчивается нулем.
- ???

Следовательно, целое число оканчивается цифрой *5*.

Указание. См. задачу 37, е.

«ЛОГИЧЕСКИЕ» ЗАДАЧИ

54 Один из трех братьев Витя, Толя, Коля разбил окно. В разговоре участвуют еще двое братьев — Андрей и Дима.

- Это мог сделать только или Витя, или Толя, — сказа Андрей.
- Я окно не разбивал, — возразил Витя, — и Коля тоже.
- Вы оба говорите неправду, — заявил Толя.
- Нет, Толя, один из них сказал правду, а другой сказа неправду, — возразил Дима.
- Ты, Дима, неправ, — вмешался Коля.

Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что трое братьев сказали правду. Кто разбил окно?

55 Один из трех братьев поставил на скатерть кляксу.

- Витя не ставил кляксу, — сказал Алеша. — Это сделал Боря.
- Ну, а ты что скажешь? — спросила бабушка Борю.
- Это Витя поставил кляксу, — сказал Боря. — А Алеша не пачкал скатерть.
- Я знаю, что Боря не мог это сделать. А я сегодня не готовил уроки, — сказал Витя.

Оказалось, что двое мальчиков в каждом из двух случаев сказали правду, а один оба раза сказал неправду. Кто поставил на скатерть кляксу?

Указание. Образуйте сначала всевозможные попарные дизъюнкции из высказываний братьев. Все они будут истинны. Затем рассмотрите конъюнкцию всех этих истинных дизъюнкций. Она также будет истинна. Преобразовав ее к конъюнкции элементарных высказываний, установите виновного.

56 Один из четырех мальчиков испортил выключатель. На вопрос: «Кто это сделал?» — были получены такие ответы: 1) «Это сделал или Миша, или Коля»; 2) «Это сделал или Витя, или Коля»; 3) «Это не могли сделать ни Толя, ни Миша»; 4) «Это сделал или Витя, или Миша». Можно ли по этим данным установить, кто виновен в поломке выключателя, если из четырех высказываний три высказывания истинны?

57 Четыре друга — Антонов (*А*), Вехов (*В*), Сомов (*С*), Деев (*Д*) — решили провести свой отпуск в четырех различных городах — Москве, Ленинграде, Киеве и Ташкенте. В какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения:

P) если *А* не едет в Москву, то *С* не едет в Ленинград;
Q) если *В* не едет ни в Москву, ни в Ташкент, то *А* едет в Москву;
R) если *С* не едет в Ташкент, то *В* едет в Киев;
S) если *Д* не едет в Москву, то *В* едет в Москву;
T) если *Д* не едет в Ленинград, то *В* не едет в Москву?

58 Шесть спортсменов — Адамов, Белов, Ветров, Глебов, Дронов, Ершов — в проходившем соревновании заняли шесть первых мест, причем ни одно место не было разделено между ними. О том, кто какое место занял, были получены такие высказывания: 1) «Кажется, первым был Адамов, а вторым — Дронов»; 2) «Нет, на первом месте был Ершов, а на втором — Глебов»; 3) «Вот так болельщики! Ведь Глебов был на третьем месте, а Белов — на четвертом»; 4) «И вовсе не так: Белов был пятым, а Адамов — вторым»; 5) «Вы все перепутали: пятым был Дронов, перед ним — Ветров». Известно, что в высказывании каждого болельщика одно утверждение - истинное, а второе ложное. Определите, какое место занял каждый из спортсменов.

Указание. Рассмотрите высказывание: A_i: «Адамов занял *i-е* место» *(i*= 1, 2, 3, 4, 5, 6). Аналогичные значения имеют символы: 5ь V_i G_i, D_i E_i. Высказывания болельщиков представьте в виде дизъюнкций. Все они будут истинны. Рассмотрите конъюнкцию этих истинных дизъюнкций. Преобразуйте эту конъюнкцию и, учитывая ее истинность, выведите распределение мест между спортсменами.

59 Для четырех дружинников, фамилии которых начинаются буквами *A, E, P, C,* необходимо составить график дежурств на четыре вечера подряд, учитывая, что: 1) *C* и *P* не могут дежурить в первый вечер в связи с командировкой; 2) если *C* выйдет во второй вечер или *P* — в третий, то *E* сможет подежурить в четвертый; 3) если *A* не будет дежурить в третий вечер, то *E* согласен дежурить во второй .вечер; 4) если *A* или *P* будут дежурить во второй вечер, то *C* сможет пойти в четвертый вечер; 5) если *P* в четвертый вечер уедет на конференцию, то *A* придется дежурить в первый, а *C* — в третий вечер.

60 При составлении расписания уроков на один день учителя математики, истории и литературы высказали следующие пожелания: математик просил поставить ему или первый, или второй урок; историк—или первый, или третий; учитель литературы — или второй, или третий. Как составить расписание уроков, чтобы учесть все пожелания?

61 Для полярной экспедиции из восьми претендентов *A, B, C, D, E, F, G* и *H* надо отобрать шесть специалистов: биолога, гидролога, синоптика, радиста, механика и врача. Обязанности биолога могут выполнять *E* и *G,* гидролога — *B* и *F,* синоптика — *F* и G, радиста — *C* и *D*, механика— *C* и *H* врача — *A* и *D.* Хотя некоторые претенденты владеют двумя специальностями, в экспедиции каждый сможет выполнять только одну обязанность. Кого и кем следует

взять в экспедицию, если F не может ехать без B, D — без H и без C, C не может ехать одновременно с G, а A не может ехать вместе с B?

62 Некий остров населен жителями, каждый из которых либо всегда говорит правду, либо всегда лжет и которые отвечают на вопросы только посредством «да» или «нет». К развилке дорог, из которых одна ведет в столицу острова, а другая туда не приводит, подходит путешественник. Никаких знаков, указывающих, какая из дорог куда ведет, у развилки нет. Но здесь стоит местный житель, некто N. Какой вопрос, предусматривающий ответ «да» или «нет», должен задать ему путешественник, чтобы определить, какая дорога ведет в столицу острова?

1.8 ЗАДАЧИ IV

1 Выразить через суперпозиции функций $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\oplus$, $/$, $\downarrow$ через функции $\&$ и $\neg$.

2 Выразить через суперпозиции функций $\vee$, $\&$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\oplus$, $/$, $\downarrow$ через функции $\to$ и $\neg$.

3 Выразить через суперпозиции функций $\vee$, $\&$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\oplus$, $/$ через стрелку пирса $\downarrow$.

4 Доказать, что для всякой булевой функции $f(x_1,..., x_n)$ справедливо соотношение

$$f(x_1,..., x_n) = (x_1 \,\&\, f(1, x_2..., x_n)) \vee (x_1 \,\&\, f(0, x_2..., x_n)).$$

5 Доказать полноту: а) $\{\vee,\&,\neg\}$; б) $\{\vee,\neg\}$; в) $\{\&,\neg\}$; г) $\{\to,\neg\}$; д) $\{/\}$; е) $\{\downarrow\}$; ж) $\{\oplus,\&,1\}$.

6 Доказать, что функции $\{/\}$ и $\{\downarrow\}$ являются единственными булевыми функциями от двух переменных, через каждую из которых могут быть выражены все другие булевы функции.

7 Доказать, что нельзя выразить с помощью суперпозиции

а) $\neg$ через $\vee$, $\&$, $\to$ и $\leftrightarrow$;

б) $\&$ через $\vee$ и $\to$;

в) $\to$ через $\vee$, $\&$;

г) $\vee$ через $\neg$ и $\leftrightarrow$;

д) $\leftrightarrow$ через $\vee$, $\&$.

8 Доказать неполноту а) $\vee$, $\&$, $\to$; б) $\{\neg\}$.

9 Доказать независимость а) $\{\neg,\leftrightarrow\}$; б) $\{\neg,\oplus\}$; в) $\{\oplus,\leftrightarrow\}$; г) $\{\leftrightarrow,\vee\}$.

10 Указать все монотонные функции двух аргументов.

11 Указать все функции двух аргументов, сохраняющие 0, сохраняющие 1.

12 Решить булевы уравнения: а) $x \vee y = 0$; б) $xy = 1$;
в) $(1 \to x) \to y = 0$; г) $((x \to 1)x \leftrightarrow 1 = 0$; д) $x \vee y = x$;
е) $x \to y = y$; ж) $xy = x \to y$; з) $x \leftrightarrow y = x \vee y$.

13 Решить системы булевых уравнений:
а) $\begin{bmatrix} x \leftrightarrow y = x \\ x \vee y = x \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} x \to y = xy \\ y \to x = x \vee y \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} xy = x \to y \\ x \vee y = x \end{bmatrix}$.

14 Решить параметрические булевы уравнения: (a - заданный элемент): а) ё; б) $x \vee a = 1$; в) $xa = 1$ г) $xa = 0$; д) $x \to a = 1$; е) $a \to x = 1$.

15 При каком условии на a и b уравнение $a \vee x = b$ имеет решение?

16 При каком условии на a и b уравнение $ax \vee bx = 1$ имеет решение? Найти это решение.

17 Доказать, что из соотношений $ax = ay$ и $\overline{a}x = \overline{a}y$, где a - фиксированный элемент, следует $x = y$.

1.9 ЗАДАЧИ V

1 Две формулы, содержащие только переменные и связки $\vee$, $\&$, $\neg$ эквивалентны. Доказать, что они останутся эквивалентными, если всюду заменить $\vee$ на $\&$ и наоборот.

2 Логика записи ФАВ Лукасевича не требует скобок: $+ab$ вместо $(a+b)$. Например, $(a+b)\times(c+(d\times e))$ в его обозначениях запишется как $\times + ab + c \times de$. Это польская запись. Обратная польская запись – знак операции идет после операндов. Доказать, что в обоих случаях порядок действий восстанавливается однозначно.

3 Привести пример булевой функции n аргументов, у которой любая ДНФ и КНФ содержит лишь члены длины n.

4 Доказать полноту $\{\neg, \to\}$.

5 Доказать не полноту $\{\&, \vee, \to\}$.

6 ФАВ с использованием лишь $\&$ и $\vee$ монотонна (увеличение любого аргумента не уменьшает значения функции). Доказать, что любая монотонная ФАВ может быть выражена с использованием лишь $\&$ и $\vee$.

7 Пусть $\varphi \to \psi$ - тавтология. Доказать, что найдется формула τ, которая включает общие для φ и ψ переменные, для которых ФАВ $\varphi \to \tau$ и $\tau \to \psi$ есть тавтологии.

8 Доказать полноту $\{/\}$, / - операция Шеффера $x / y \leftrightarrow \overline{x \& y}$.

9 Доказать полноту $\{\downarrow\}$, $\downarrow$ - операция Пирса $x \downarrow y \leftrightarrow \overline{x \vee y}$.

10 Доказать критерий Поста.

2 ВЫВОДИМОСТЬ

- ФАВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ выполнима, если

  $\exists < A_1, ..., A_n >: F(A_1, ..., A_n) = 1$.

  ФАВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ опровержима, если

  $\exists < A_1, ..., A_n >: F(A_1, ..., A_n) = 0$.

  ФАВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ - тавтология, если

  $\forall < A_1, ..., A_n >: F(A_1, ..., A_n) = 1$.

  ФАВ $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ - противоречие, если

  $\forall < A_1, ..., A_n >: F(A_1, ..., A_n) = 0$.

- $G(X_1, X_2, ..., X_n)$ - *логическое следствие* $F_1(X_1, X_2, ..., X_n)$, …, $F_m(X_1, X_2, ..., X_n)$ ($F_1, ..., F_m \Rightarrow G$), если $\forall < A_1, ..., A_n >$ из $F_1(A_1, ..., A_n) = 1$ & … & $F_m(A_1, ..., A_n) = 1$ следует $G(A_1, ..., A_n) = 1$.

- F равносильна G ($F \equiv G$), если

  $\forall < A_1, ..., A_n >: F(A_1, ..., A_n) = G(A_1, ..., A_n)$.

  $F \equiv G \;\Leftrightarrow\; F \leftrightarrow G - true$.

- Упрощенная система высказываний:

  $(A_1, ..., A_n) \;\Rightarrow\; (A_1 \& ... \& A_n) \;\Rightarrow$ равносильные преобразования $\Rightarrow$ $(B_1 \& ... \& B_n) \;\Rightarrow\; (B_1, ..., B_n)$.

- T - теория. $\succ_T F$. $F_1, ..., F_n \succ_T F$. Непротиворечивость, полнота, независимость аксиом.

  1-я теорема Геделя: Если T - непротиворечива, то

  $\exists (F \in T): F, \overline{F} - невыводимы.$

  2-я теорема Геделя: материк и острова.

Гедель в 1931г. показал, что для арифметики (а значит и для большинства других дисциплин) невозможно составить полную систему аксиом потому, что всегда найдутся истинные теоремы, которые, тем не менее, нельзя формально доказать, исходя из любой системы аксиом, - как бы мы эту систему ни расширяли. Гедель показал, что имеются различия между истинностью и выводимостью – существуют теоремы истинные, но не выводимы, не доказуемые в рамках данной системы аксиом. До 1931 г. Математики были уверены, что эти следствия образуют некоторый «материк истины» и до любой точки этого материка мы можем добраться «сухопутным путем», путем дедуктивного рассуждения из принятых аксиом. Гедель показал, что структура истины сложнее и напоминает скорее материк, окруженный островами. Существую бесконечное количество утверждений истинных, но не доказуемы в рамках принятой системы аксиом, как бы мы ее ни расширяли. Эти утверждения образуют «острова истинности» за пределами дедуктивного материка.

- $A \equiv B \;\Leftrightarrow\; A \leftrightarrow B \equiv true$.
- $A = A(x_1,..., x_n)$ - ФАВ, $B = B(x_1,..., x_n)$ - ФАВ,

$$\forall < \hat{x}_1,..., \hat{x}_n >: если A(\hat{x}_1,..., \hat{x}_n) = 1, то B(\hat{x}_1,..., \hat{x}_n) = 1 \overset{df}{-} A \Rightarrow B.$$

- $(x \vee y)z \;\Rightarrow\; x \vee y$;

x	y	z	$(x \vee y)\,\&\,z$	$(x \vee y)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

- $\{F_1,..., F_n\} \Rightarrow F \overset{df}{-} \{F_1 \,\&\,...\,\&\, F_n \to F$;

$$\{F_1,..., F_n\} \Rightarrow F \;\Leftrightarrow\; \succ F_1 \,\&\,...\,\&\, F_n \to F \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \overline{F_1 \,\&\,...\,\&\, F_n \to F} \text{ - } false \;\Leftrightarrow\; \neg(\overline{F_1 \,\&\,...\,\&\, F_n} \vee F) \text{ - } false \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; F_1 \,\&\,...\,\&\, F_n \,\&\, \overline{F} \text{ - } false.\; \Phi = \{F_1,...,F_n, \overline{F}\} \text{ - } false.$$

- $A \equiv B \;\Leftrightarrow\; A \Rightarrow B \;\&\; B \Rightarrow A$.
- Теор.: $B \Leftarrow A \;\Leftrightarrow\; A \to B - true$.

  Если $A - false$, то $\forall B : A \Rightarrow B$.

Наоборот $\exists a_1,\ldots,a_n\{\overline{B(a_1,\ldots,a_n) \Leftarrow A(a_1,\ldots,a_n)}\}$ т.е.

$A(a_1,..., a_n) = 1, B(a_1,..., a_n) = 0$, тогда $A \to B \neq 1$.

- *Схемы логического заключения.*

$$\frac{\overline{A} \to B, \overline{A} \to \overline{B}}{A};\ \frac{A \vee B, \overline{A}}{B};\ \frac{A / B, A}{\overline{B}};\ \frac{A \leftrightarrow B, A}{B}.$$

- Тождественно истинные.

Modus ponens: $(x \,\&\, (x \to y)) \to y \equiv 1$.

Modus tollens: $((x \to y) \,\&\, \overline{y}) \to \overline{x} \equiv 1$.

$x \to x \equiv 1$; $\overline{x \,\&\, \overline{x}} \equiv 1$; $x \vee \overline{x} \equiv 1$; $\overline{\overline{x}} \leftrightarrow x \equiv 1$; $x \to (y \to x) \equiv 1$;

$\overline{x} \to (x \to y) \equiv 1$.

- Выводимость: подстановка $F_B^{x_i}(A)$; МР $\dfrac{A, A \to B}{B}$.

- $\Phi = \{R_1 = x_1 \to (x_2 \to x_1);$

$R_2 = (x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3))\}$

$\dfrac{\Phi}{A \to A}$:

$R_3 = F_A^{x_1}(R_2)$: $(A \to (x_2 \to x_3)) \to ((A \to x_2) \to (A \to x_3))$;

$R_4 = F_{A \to A}^{x_2}(R_3)$:

$(A \to ((A \to A) \to x_3)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to x_3))$;

$R_5 = F_A^{x_3}(R_4)$:

$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$;

$R_6 = F_A^{x_1}(R_1)$: $A \to (x_2 \to A)$;

$R_7 = F_{A \to A}^{x_1}(R_6)$: $A \to ((A \to A) \to A)$;

$R_6 = MP(R_5, R_7)$: $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$;

$R_7 = F_A^{x_1}(R_1)$: $A \to (x_2 \to A)$;

$R_8 = F_A^{x_2}(R_7)$: $A \to (A \to A)$;

$R_9 = MP(R_8, R_6)$: $A \to A$.

- $U \Rightarrow V$ и $U \Rightarrow W$, то $U \Rightarrow V \,\&\, W$.

По условию $U \to V$ и $U \to W$ - тавтологии, то когда истинно U, истинны V и W. Тогда истинна $V \& W$ и $U \to V \& W$ тавтология и $U \Rightarrow V \& W$.

- Если $\Phi \Rightarrow R \& S$ и $\Phi \Rightarrow P \& \overline{S}$, то $\Phi \Rightarrow P \& R \& S \& \overline{S}$, т.е. $\Phi \Rightarrow false$.

  Резолюция: $\{U \vee V, W \vee \overline{V}\} \Rightarrow U \vee W$ или $\{V, W \vee \overline{V}\} \Rightarrow W$, а также тем, если $E \Rightarrow G$, то $S \& E \Rightarrow S \& G$.

- Докажем, что

  $$(A \to (B \& C)) \& (B \to D) \& (C \to E) \& (\overline{A} \to F) \to (D \& E) \vee F$$

  Эквивалентные преобразования:

  $$(A \to (B \& C)) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee (B \& C)) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B) \& (\overline{A} \vee C);$$
  $$(B \to D) \Leftrightarrow (\overline{B} \vee D);$$
  $$(C \to E) \Leftrightarrow (\overline{C} \vee E);$$
  $$(\overline{A} \to F) \Leftrightarrow (A \vee F).$$

  Отрицание заключения:

  $$\overline{D \& E) \vee F} \Leftrightarrow \overline{D \& E} \& \overline{F} \Leftrightarrow (\overline{D} \vee \overline{E}) \& \overline{F}.$$

  Таким образом, необходимо доказать, что множество формул (конъюнктивная нормальная форма)

  $$F_1 \& F_2 \& F_3 \& F_4 \& F_5 \& F_6 \& F_7,$$

  где

  $F_1 = (\overline{A} \vee B)$, $F_2 = (\overline{A} \vee C)$, $F_3 = (\overline{B} \vee D)$, $F_4 = (\overline{C} \vee E)$,

  $F_5 = (A \vee F)$, $F_6 = (\overline{D} \vee \overline{E})$, $F_7 = \overline{F}$

  противоречиво.

  $\{F_5, F_7\} \Rightarrow A$, следовательно:

  $(\overline{A} \vee B) \& (\overline{A} \vee C) \& (\overline{B} \vee D) \& (\overline{C} \vee E) \& (A \vee F) \& (\overline{D} \vee \overline{E}) \& (\overline{F}) \Rightarrow$

  $\Rightarrow (\overline{A} \vee B) \& (\overline{A} \vee C) \& (\overline{B} \vee D) \& (\overline{C} \vee E) \& (\overline{D} \vee \overline{E}) \& A;$

  $\{A, F_2\} \Rightarrow C$, поэтому:

  $(\overline{A} \vee B) \& (\overline{A} \vee C) \& (\overline{B} \vee D) \& (\overline{C} \vee E) \& (\overline{D} \vee \overline{E}) \& A \Rightarrow$

  $\Rightarrow (\overline{A} \vee B) \& (\overline{B} \vee D) \& (\overline{C} \vee E) \& (\overline{D} \vee \overline{E}) \& C;$

  $\{C, F_4\} \Rightarrow E$, поэтому:

$(\overline{A} \vee B) \& (\overline{A} \vee C) \& (\overline{B} \vee D) \& (\overline{C} \vee E) \& (\overline{D} \vee \overline{E}) \& A \Rightarrow$

$\Rightarrow (\overline{A} \vee B) \& (\overline{B} \vee D) \& (\overline{D} \vee \overline{E}) \& E$;

$\{E, F_6\} \Rightarrow \overline{D}$, поэтому:

$(\overline{A} \vee B) \& (\overline{B} \vee D) \& (\overline{D} \vee \overline{E}) \& E \Rightarrow (\overline{A} \vee B) \& (\overline{B} \vee D) \& \overline{D}$;

$\{\overline{D}, F_3\} \Rightarrow \overline{B}$, поэтому:

$(\overline{A} \vee B) \& (\overline{B} \vee D) \& \overline{D} \Rightarrow (\overline{A} \vee B) \& \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Используя утверждение «Если $E \Rightarrow G$, то $S \& E \Rightarrow S \& G$», получим $A \& \Phi \Rightarrow A \& \overline{A}$. Т.к. $A \& \overline{A} = 0$, $A \& \overline{A} \to false$, то $A \& \overline{A} \Rightarrow false$. Используя утверждение «Если $U \Rightarrow V$ и $V \Rightarrow W$, то $U \Rightarrow W$», получим $\overline{A} \Rightarrow false$.

Следовательно формула противоречива, что и доказывает исходное утверждение.

3 МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ

Правило резолюции: $\{(U \vee \overline{V}), V\} \Rightarrow U$ или $V, (V \to U) \Rightarrow U$.

1 Приведение формулы к логически эквивалентной КНФ. Дизъюнкт (*clause*) – дизъюнкция конечного числа символов и их отрицаний (*литер*) $D = p_1 \vee ... \vee p_n$. КНФ – конъюнкция конечного числа дизъюнктов. КНФ существует для всякой формулы.

2 Дизъюнкты, содержащие противоположные литеры $p \vee \overline{p}$ являются тавтологиями и можно отбросить. Если в дизъюнкте встречается одна и та же литера ($p \vee p$ или $\overline{q} \vee \overline{q}$), она записывается один раз. Получается СКНФ.

3 Пустым дизъюнктом называется константа $false$. Если КНФ не содержит ни одного дизъюнкта (*пуста*), он эквивалентна $true$.

КНФ общезначима (тавтология), если все ее дизъюнкты общезначимы.

Дизъюнкт невыполним в том и только в том случае, если он пустой.

Пример. Проверим совместимость утверждений, проверяя будет ли конъюнкция, выражающая каждое утверждение, противоречием.

Если курс ценных бумаг растет (A) *или процентная ставка снижается* (B)*, то либо падает курс акций* (C)*, либо налоги не повышаются* (D)*. Курс акций понижается* (C) *тогда и только тогда, когда растет курс ценных бумаг* (A) *и налоги растут* $(\overline{D})$*. Если процентная ставка снижается* (B)*, то либо курс акций не понижается* $(\overline{C})$*, либо курс ценных бумаг не растет* $(\overline{A})$*. Либо повышаются налоги* $(\overline{D})$*, либо курс акций понижается* $(\overline{C})$ *и снижается процентная ставка* (B)*.*

$$F_1 = ((A \vee B) \to (C \vee D)) \ ;$$

$$F_2 = (C \equiv (A \,\&\, \overline{D}));$$

$$F_3 = (B \to (\overline{C} \vee \overline{A}));$$

$$F_4 = (\overline{D} \vee (\overline{C} \,\&\, B)).$$

Переходим к дизъюнктам, используя $F_2 \Leftrightarrow (C \equiv (A \,\&\, \overline{D}))$.

$$F_1 \Leftrightarrow ((\overline{A} \,\&\, \overline{B}) \vee (A \,\&\, \overline{D}) \vee D) \ \Leftrightarrow \ ((\overline{A} \,\&\, \overline{B}) \vee (A \vee D) \vee (\overline{D} \vee D)) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((\overline{A} \vee A \vee D) \,\&\, (\overline{B} \vee A \vee D)) \ \Leftrightarrow \ (\overline{B} \vee A \vee D);$$

$$F_3 \Leftrightarrow (B \to (\overline{(A \,\&\, \overline{D})} \vee \overline{A})) \ \Leftrightarrow \ (\overline{B} \vee (\overline{A} \vee D \vee \overline{A})) \ \Leftrightarrow \ (\overline{B} \vee \overline{A} \vee D);$$

$$F_4 \Leftrightarrow (\overline{D} \vee \overline{(A \,\&\, \overline{D})} \,\&\, B)) \ \Leftrightarrow \ (\overline{D} \vee ((\overline{A} \vee D) \,\&\, B)) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ ((\overline{D} \vee B) \,\&\, (\overline{D} \vee \overline{A} \vee D)) \ \Leftrightarrow \ (\overline{D} \vee B).$$

СКНФ: $F_1 \,\&\, F_3 \,\&\, F_4 \ \Leftrightarrow \ (\overline{B} \vee A \vee D) \,\&\, (\overline{B} \vee \overline{A} \vee D) \,\&\, (\overline{D} \vee B)$.

Применение правила резолюций к дизъюнктам (клаузам) не дает противоречия, следовательно, утверждения совместны.

4 ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

- Знаковая система, развитая на основе языка, аксиом и правил вывода.
- Тавтология (тождественно истинная формула), множество тавтологий, аксиомы, выводимость (определение на основе алгоритма), вывод.

Исчисление ***C₀***

- Язык: алфавит: $\{0,\ X_i\ ,\ \to ,\ (,\ )\}$, в ФИВ нет вхождений $\{1,\ \neg ,\ \vee ,\ \&\}$; синтаксис – тот же, что и в АВ; семантика – отсутствует.

- Аксиомы:

  $A_1:\ X_1 \to (X_2 \to X_1)$;

  $A_2:\ (X_1 \to (X_2 \to X_3)) \to ((X_1 \to X_2) \to (X_1 \to X_3))$;

  $A_3:\ 0 \to X_1$;

  $A_4:\ ((X_1 \to 0) \to 0) \to X_1)$.
- Правила вывода:

  $A_1, A_2, ..., A_n$ - формулы; $y_1, y_2, ..., y_n$ - переменные;

  Подстановка: $S^{y_1 y_2 ... y_n}_{A_1 A_2 ... A_n}(R)$; $R \succ S^{y_1 y_2 ... y_n}_{A_1 A_2 ... A_n}(R)$, доказательство – индукция по построению R.

  Заключение (modus ponens): A, $A \to B \succ B$, $\forall A, B \in$ ***C₀***.
- Γ - ФИВ в ***C₀***; $B_1, B_2, ..., B_n = A$ - вывод A из гипотез Γ, если B_i - аксиома в ***C₀***, $B_i \in \Gamma$, B_i получена из $\{B_j\}, j < i$, по правилу вывода; $\Gamma \succ_{C_0} A$, $\succ_{C_0} A$, $A_1, A_2, ..., A_n \succ_{C_0} A$.
- Выводимая в ***C₀*** ФИВ есть тавтология.
- Если Γ, $A \succ_{C_0} B$, то $\Gamma \succ_{C_0} A \to B$.
- Если $A_1, A_2, \ldots, A_n \succ_{C_0} A$, то $\succ_{C_0} A_1 \to (A_2 \to (... \to (A_n \to A)...)$.
- Схемы правил вывода: $\dfrac{A, A \to B}{B}$, $\dfrac{A}{S(A)}$.
- Новые правила вывода: $\dfrac{B}{A \to B}$, $\dfrac{A \to B, B \to C}{A \to C}$ (силлогизм),

  $\dfrac{(A_1 \to (A_2 \to \ldots (A_n \to A)\ldots)}{(A_{i_1} \to (A_{i_2} \to \ldots (A_{i_n} \to A)\ldots)}$ (перестановка просылок),

  $\dfrac{A \to B, ((A \to 0) \to B)}{(B \to 0) \to 0}$, $\dfrac{A \to B, ((A \to 0) \to B)}{B}$, $\dfrac{A, A \to 0}{B}$.

Исчисление ***C₁***
- Язык ***C₁*** совпадает с языком ***C₀***.
- Схемы аксиом (бесконечное множество аксиом):

  $\tilde{A}_1:\ \alpha \to (\beta \to \alpha)$;

  $\tilde{A}_2:\ (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$;

$\tilde{A}_3 : 0 \to \alpha$;

$\tilde{A}_4 : ((\alpha \to 0) \to 0) \to \alpha)$.

MP – единственное правило вывода.

Исчисление ***C₂***

- Язык: алфавит - {0, 1, X_i, $\neg$, $\&$, $\to$, (,); синтаксис совпадает с ***C₀***.
- Аксиомы (сокращение - $\neg(\overline{A} \& \overline{B}) = A \to B$):

$\overline{A_1} : A \to (A \& A)$;

$\overline{A_2} : (A \& B) \to A$;

$\overline{A_3} : (A \to B) \to (\overline{B \& C} \to \overline{C \& A})$.

Исчисление ***C₃***

- Алфавит - { X_i, $\neg$, $\to$, (,); синтаксис совпадает с ***C₀***.
- Схемы аксиом:

$A_1 : F \to (G \to F)$;

$A_2 : (F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$;

$A_3 : (\overline{G} \to \overline{F}) \to ((\overline{G} \to F) \to G)$.

MP: $\dfrac{F, F \to G}{G}$.

- Связки: $F \& G \equiv \neg(F \to \overline{G})$; $F \vee G \equiv \overline{F} \to G$;

$F \leftrightarrow G \equiv (F \to G) \& (G \to F)$.

Независимость аксиом ***C₃***

$M = \{0,1,2\}$.

A	0	1	2	0	1	2	0	1	2
B	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$A \to B$	0	2	0	2	2	0	2	0	0

A	$\overline{A}$
0	1
1	1
2	0

- Зная $\to$ и $\neg$, можно выразить $\&$, $\vee$, $\leftrightarrow$.
- ФИВ называется *выделенной*, если принимает значение 0 на всех наборах.

$A_2 : (F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$ - выделенная;

$A_3 : (\overline{G} \to \overline{F}) \to ((\overline{G} \to F) \to G)$ - выделенная.

Проверка по таблицам истинности.

MP сохраняет свойство выделенности, т.е. если F, $F \to G$ - выделенные, то G - выделенная.

$A_1: F \to (G \to F)$ - не выделенная (проверка по таблице).

Аксиома независима от остальных аксиом, если она не может быть выведена из них в этой теории.

A_1 -независима от A_2 и A_3 в ИВ ***C₃***.

Исчисление Гильберта-Бенсайда.

- Схемы аксиом:

$A_1: x_1 \to (x_2 \to x_1)$;

$A_2: ((x_1 \to x_2) \to x_1) \to x_1$

$A_3: (x_1 \to x_2) \to ((x_2 \to x_3) \to (x_1 \to x_3))$;

$A_4: (x_1 \& x_2) \to x_1$;

$A_5: (x_1 \& x_2) \to x_2$;

$A_6: ; (x_1 \to x_2) \to ((x_1 \to x_3) \to (x_1 \to (x_2 \& x_3)))$

$A_7: x_1 \to (x_1 \vee x_2)$;

$A_8: x_2 \to (x_1 \vee x_2)$;

$A_9: (x_1 \to x_2) \to ((x_2 \to x_3) \to (x_1 \vee x_2) \to x_3))$;

$A_{10}: (x_1 \leftrightarrow x_2) \to (x_1 \to x_2)$;

$A_{11}: (x_1 \leftrightarrow x_2) \to (x_2 \to x_1)$;

$A_{12}: (x_1 \to x_2) \to ((x_2 \to x_1) \to (x_1 \leftrightarrow x_2)$;

$A_{13}: (x_1 \to x_2) \to (\overline{x_2} \to \overline{x_1})$;

$A_{14}: x_1 \to \overline{\overline{x_1}}$;

$A_{15}: \overline{\overline{x_1}} \to x_1$.

4.1 ЗАДАЧИ VI

Построить вывод в ***C₀***. При необходимости ввести обозначения.

1 $\succ (\overline{A} \to A) \to A$.

2 $A \to B, B \to C \succ A \to C$.

3 $A \to (B \to C) \succ B \to (A \to C)$.

4 $\succ (\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$.

5 $\succ \overline{\overline{A}} \to A$.

6 $\succ A \to \overline{\overline{A}}$.

7 $\succ \overline{A} \to (A \to B)$.

8 $\succ (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$.

9 $\succ A \to (\overline{B} \to \overline{A \to B})$.

10 $\succ (A \to B) \to ((\overline{A} \to B) \to B)$.

11 $\succ ((A \to B) \to A) \to A$.

12 $A \to B, B \to C \succ \neg(\overline{C} \,\&\, A)$.

13 $\succ \neg(\overline{A} \,\&\, A)$.

14 $\succ \overline{A \,\&\, B} \to (B \to \overline{A})$.

15 $(A \to B) \succ (C \,\&\, A) \to (B \,\&\, C)$

16 $A \to B, B \to C, C \to D \succ A \to D$.

17 $\succ (A \,\&\, B) \to (B \,\&\, A)$.

18 $\succ A \to (B \to A \,\&\, B)$.

19 $\overline{A \vee B}, C \to \overline{B} \succ A \to \overline{C}$.

20 $A \vee B, A \to C, B \to D \succ C \vee D$.

21 $A \to (B \to C), \overline{D} \vee A, B \succ D \to C$.

22 $(A \vee B) \to C \vee D, (D \vee E) \to F \succ A \to F$.

23 $A \to C \succ (B \vee A) \to (B \vee C)$.

24 $\succ \overline{A} \vee A$.

25 $\succ A \vee \overline{A}$.

26 $\succ (A \vee (B \vee C)) \to ((B \vee (A \vee C)) \vee A$.

27 $\succ (B \vee (A \vee C)) \vee A \to B \vee (A \vee C)$.

28 $\succ (A \vee (B \vee C)) \to (B \vee (A \vee C))$.

4.2 ЗАДАЧИ VII

1 Построить вывод в $\boldsymbol{C_3}$:

а) $A \to A$;

б) $(\overline{G} \to G) \to G$;

в) $(\overline{G} \to \overline{F}) \to (F \to G)$.

2 Доказать выводимости:

а) $F, G, F \to (G \to H) \succ H$;

б) $F \to G, G \to H \succ F \to H$;

в) $F \to (G \to H) \succ G \to (F \to H)$;

г) $\overline{G} \to \overline{F} \succ F \to G$.

3 Построить вывод в $\boldsymbol{C_3}$:

а) $F, F \to G \succ G$;

б) $F \& G \succ G$;

в) $G \succ F \vee G$;

г) $F \leftrightarrow G \succ G \to F$.

4 Доказать теоремы в $\boldsymbol{C_3}$:

а) $\overline{\overline{F}} \to F$;

б) $F \to \overline{\overline{F}}$;

в) $\overline{F} \to (F \to G)$;

г) $(\overline{G} \to \overline{F}) \to (F \to G)$;

д) $(F \to G) \to (\overline{G} \to \overline{F})$;

е) $F \to (\overline{G} \to \overline{F \to G}$;

ж) $(F \to G) \to ((\overline{F} \to G) \to G$;

з) $(F \to G) \to ((F \to \overline{G}) \to \overline{F}$;

и) $((F \to G) \to F) \to F$.

5 Доказать, что $F, G \succ H$ тогда и только тогда, когда $\succ (F \& G) \to H$.

6 Доказать справедливость правил вывода в $\boldsymbol{C_3}$:

а) $\dfrac{\Gamma, F \succ G}{\Gamma \succ F \to G}$;

б) $\dfrac{\Gamma \succ F, \Gamma \succ G}{\Gamma \succ F \& G}$;

в) $\dfrac{\Gamma \succ F}{\Gamma \succ F \vee G}$;

г) $\dfrac{\Gamma, F \succ G; \Gamma, F \succ \overline{G}}{\Gamma \succ \overline{F}}$;

д) $\dfrac{\Gamma \succ F, \Gamma \succ F \to G}{\Gamma \succ G}$;

е) $\dfrac{\Gamma \succ F \,\&\, G}{\Gamma \succ F}$;

ж) $\dfrac{\Gamma \succ F \vee G; \Gamma, F \succ H; F, G \succ H}{\Gamma \succ H}$.

7 Доказать выводимости в $\boldsymbol{C_3}$:

а) $F \,\&\, G \succ G \,\&\, F$;

б) $\succ F \vee \overline{F}$;

в) $\succ \overline{F \vee G} \leftrightarrow (\overline{F} \,\&\, \overline{G})$;

г) $\succ \overline{F \,\&\, G} \leftrightarrow (\overline{F} \vee \overline{G})$;

д) $\succ (F \to G) \leftrightarrow (\overline{G} \to \overline{F})$;

е) $\succ (F \vee (F \,\&\, G) \leftrightarrow F$.

4.3 ЗАДАЧИ VIII

1 Доказать, что A_2 в $\boldsymbol{C_3}$ не зависит от A_1, A_3.

2 Доказать, что A_3 в $\boldsymbol{C_3}$ не зависит от A_1, A_2.

3 Доказать, что A_3 в $\boldsymbol{C_3}$ можно заменить на аксиому

$A_3^{'}: (\overline{G} \to \overline{F}) \to (F \to G)$.

5 ФОРМАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

Формальная теория, исчисление, дедуктивная или формальная система – кортеж $T =< \Lambda, A, R >$, где

Λ - язык, определяющий множество правильно построенных выражений или формул формальной теории (синтаксические правила);

A – множество аксиом, подмножество правильно построенных выражений;

R – множество правил вывода (множество отношений между формулами).

- Выводом в формальной системе T называется конечная последовательность формул T, в которой каждая формула является либо аксиомой T, либо непосредственно следует из каких-либо предшествующих ей в этом выводе формул по одному из правил вывода $R_{ш}$ системы T.
- Формула системы T называется теоремой этой системы, если существует вывод в T, заканчивающийся этой формулой.
- Выводом формулы м из множества формул $F_1,.., F_n$ называется такой вывод, в котором могут присутствовать формулы из этого множества. Если такой вывод существует, то F выводима в теории T из этих формул, $F_1,.., F_n \succ_T F$. $F_1,.., F_n \succ F$, если ясно, о какой терии идет речь.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1 Калужнин, Л.А. Что такое математическая логика? – М.: Наука, 1964. – 152 с.
2 Адаменко А.Н., Кучуков А.М. Логическое программирование и Visual Prolog. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. -992 с.: ил.
3 Лихтарников Л.М. Математическая логика / Курс лекций. - Спб.: Изд-во «Лань», 1998. - 288 с.
4 Латотин Л.А., Макаренков Ю.А., Николаева В.В., Столяр А.А. Математическая логика. - Минск: «Вышэйшая школа», 1990. 278 с.
5 Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. - Саратов: изд-во Сарат. ун-та, 1991. -256 с.
6 Игошин В.И. Задачник-практикум по математической логике. - М.: Просвещение, 1986. - 159 с.
7 Новиков П.С. Элементы математической логики. - М.: «Наука», 1973. - 400 с.

Электронное учебное издание

Лёвкин Игорь Васильевич

ВЫВОД В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ
(материалы спец. курса)

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»,
656038, г. Барнаул, пр-т Ленина, 46.

В НАЧАЛО

9 785756 815450