

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Алтайский государственный технический университет  
им. И. И. Ползунова

А. Д. Борисова, А. И. Алексейцев

**РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ  
РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ДЕФОРМАЦИИ**

Учебно-методическое пособие

ISBN 978-5-7568-1429-3



АлтГТУ  
Барнаул • 2022

Об издании – [1](#), [2](#)

© Борисова А. Д., Алексейцев А. И., 2022  
© Алтайский государственный технический  
университет им. И. И. Ползунова, 2022

УДК 539.3/6

**Борисова, А. Д.** Расчеты на прочность при различных видах деформации : учебно-методическое пособие / А. Д. Борисова, А. И. Алексейцев. – Барнаул : АлтГТУ, 2022. – 128 с. – URL : [http://elib.altstu.ru/uploads/open\\_mat/2022/Borisova\\_SopromatLect\\_up.pdf](http://elib.altstu.ru/uploads/open_mat/2022/Borisova_SopromatLect_up.pdf). – Текст : электронный.

ISBN 978-5-7568-1429-3

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, изучающих курс «Сопротивление материалов», «Техническая механика» или «Прикладная механика», направлений: 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», 15.03.01 «Машиностроение», 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства», а также других инженерных направлений.

Учебно-методическое пособие посвящено анализу основных видов инженерных расчетов на прочность при растяжении, сжатии, изгибе на конкретных примерах, также включает в себя варианты заданий для самостоятельного решения задач.

Рассмотрено и рекомендовано в качестве учебно-методического пособия на заседаниях кафедр АлтГТУ: «Технология машиностроения» (Протокол №1 от 07.09.2022), «Малый бизнес в сварочном производстве» (Протокол №2 от 25.10.2022), «Механика и инноватика» (Протокол №1 от 20.10.2022).

#### **Рецензенты:**

доктор технических наук, профессор *О. В. Ударцева*,  
Тюменский государственный индустриальный университет;  
доктор технических наук, профессор *Т. В. Еремينا*,

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления

Учебно-методическое пособие  
Минимальные системные требования  
Yandex (20.12.1) или Google Chrome (87.0.4280.141) и т.п.  
скорость подключения - не менее 5 Мб/с, Adobe Reader и т.п.

Дата подписания к использованию 18.11.2022. Объем издания – 6 Мб.  
Федеральное государственное образовательное учреждение высшего образования  
«Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова, 656038,  
г. Барнаул, пр-т Ленина, 46, <https://www.altstu.ru>.

ISBN 978-5-7568-1430-9

© Борисова А.Д., Алексейцев А. И., 2022  
© Алтайский государственный технический  
университет им. И.И. Ползунова, 2022

[вперед \(содержание\)](#)

## Содержание

Глава 1. Определение внутренних усилий методом сечений .....	6
Глава 2. Расчеты на прочность при растяжении (сжатии) .....	32
Глава 3. Расчеты на прочность при изгибе .....	48
Приложение А .....	72
Приложение Б .....	103
Приложение В .....	120

## Рекомендуемая литература

1. Сопротивление материалов : учебник / под ред. Г.С. Писаренко. Киев : Вища школа, 1986. – 704 с.
2. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов: учебник / В. И. Феодосьев. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 588 с.
3. Ицкович, Г. М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов / Г. М. Ицкович, Л. С. Минин, А. И. Винокуров. – Москва : Высшая школа, 2001. – 592 с.
4. Сборник задач по сопротивлению материалов с теорией и примерами : учеб. пособие / под ред. А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский. – Москва : Физматлит, 2011. – 613 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=79828> (дата обращения: 17.11.22)
5. Межецкий, Г. Д. Сопротивление материалов : учебник / Г. Д. Межецкий, Г. Г. Загребин, Н. Н. Решетник. – 5-е изд. – Москва : Дашков и К°, 2016. – 432 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453911> (дата обращения: 17.11.22)
6. Александров, А. В. Сопротивление материалов : учеб. для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – Москва : Высшая школа, 2008. – 560 с.

## Введение

При изучении курсов сопротивления материалов и технической механики наибольшие затруднения для студентов связаны обычно с решением задач. Вместе с тем очевидно, что именно эта практическая часть курса в наибольшей степени способствует развитию инженерного мышления, приобретению необходимых навыков расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Настоящее учебно-методическое пособие, составленное в соответствии с государственными стандартами дисциплин сопротивления материалов и технической механики для студентов инженерных направлений, имеет своей целью помочь студентам овладеть методами решения задач сопротивления материалов и технической механики.

Опыт показывает, что разбор решенных задач повышает эффективность самостоятельных занятий, экономит время, затрачиваемое на выполнение расчетно-проектировочных заданий, приучает студентов к анализу методов расчета на прочность и жесткость и способствует приобретению навыков грамотного оформления технических расчетов в инженерном деле.

## Глава 1. Определение внутренних усилий методом сечений

В основу расчетов на прочность при основных видах деформаций положен способ определения внутренних усилий, который получил название «метод сечений».

Между частицами твердого тела существуют определенные силы межатомного взаимодействия, называемые внутренними силами. Они стремятся сохранить тело как единое целое и противодействуют всякому внешнему воздействию, изменяющему взаимное расположение частиц. Внутренние силы действуют и при отсутствии внешней нагрузки, но в этом случае они взаимно уравновешены и никаким образом себя не проявляют. Деформация тела, являющаяся результатом внешнего воздействия, приводит к изменению внутренних сил. Таким образом, возникает необходимость связать и выразить внутренние усилия через внешние нагрузки. Для этого широко используется *метод сечений*.

Рассмотрим брус, находящийся в равновесии под действием внешних сил  $F_1, F_2, F_3 \dots F_n$  и опорных реакций (рисунок 1).

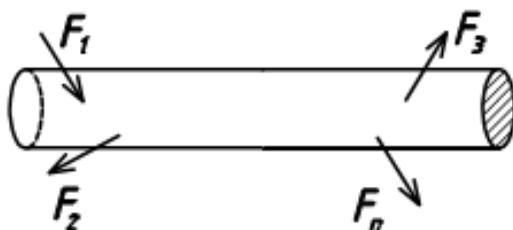


Рисунок 1.1

Мысленно разрежем стержень на две части некоторой плоскостью, перпендикулярной продольной оси  $Z$  (рисунок 2).

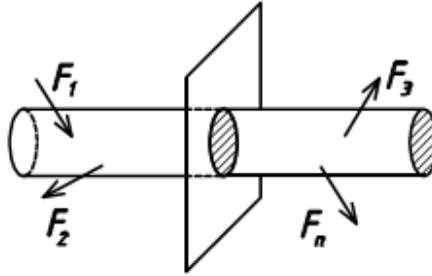


Рисунок 1.2

Внутренние силы действуют во всех точках поперечного сечения, т. е. представляют собой распределенную нагрузку. С помощью уравнений статики установить закон распределения этой нагрузки не представляется возможным. Методами статики можно лишь установить статический эквивалент внутренних сил, т. е. главный вектор  $\vec{R}$  и главный момент  $\vec{M}$ . Проекциями главного вектора и главного момента на координатную систему  $ZXY$  являются три силы и три момента, которые называются **внутренними силовыми факторами** или **внутренними усилиями**. Начало системы координат  $ZXY$  размещается в центре тяжести поперечного сечения. Ось  $Z$  направляется по внешней нормали к сечению, т. е. по продольной оси стержня, а оси  $X$  и  $Y$  направляются перпендикулярно продольной оси и лежат в плоскости сечения. Предлагается для левой и правой части выбрать направление осей и внутренних усилий так, как показано на рисунке 3.

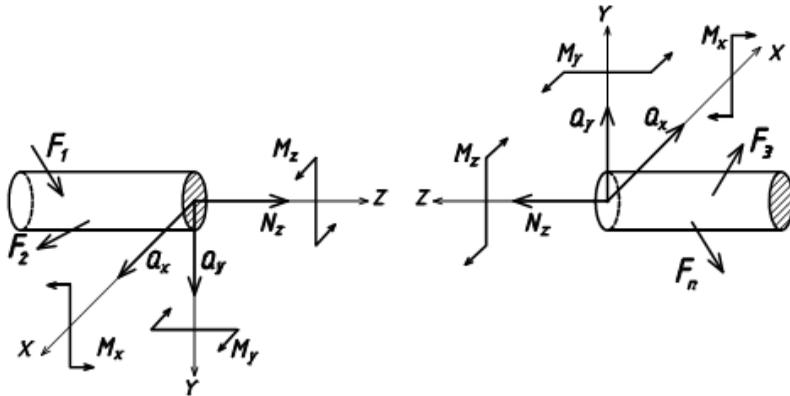


Рисунок 1.3

*Положительные направления внутренних усилий  $N_z, Q_x, Q_y$  совпадают с направлением соответствующей оси, а положительные моменты  $M_z, M_x, M_y$  направлены против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления соответствующей оси.*

Каждое внутреннее усилие имеет свое название и соответствует определенному виду деформации:

$N_z$  – продольная (осевая) сила, которая определяется как сумма проекций на продольную ось  $Z$  всех внешних сил, действующих на одну из частей рассеченного стержня, и вызывает продольную деформацию стержня (растяжение или сжатие).

$Q_x$  – поперечная (перерезывающая) сила, которая определяется как сумма проекций на ось  $X$  всех внешних сил, действующих на одну из частей рассеченного стержня, и вызывает деформацию сдвиг или срез в направлении оси  $X$ .

$Q_y$  – поперечная (перерезывающая) сила, которая определяется как сумма проекций на ось  $Y$  всех внешних сил, действующих на одну из частей рассеченного стержня, и вызывает деформацию сдвиг или срез в направлении оси  $Y$ .

$M_z$  – крутящий момент, определяется как сумма моментов всех внешних сил относительно оси  $Z$ , действующих на одну из частей рассеченного стержня, и вызывает деформацию кручение.

$M_x$  – изгибающий момент, определяется как сумма моментов всех внешних сил относительно оси  $X$ , действующих на одну из частей рассеченного стержня, и вызывает деформацию изгиб в плоскости  $ZOY$ .

$M_y$  – изгибающий момент, определяется как сумма моментов всех внешних сил относительно оси  $Y$ , действующих на одну из частей рассеченного стержня, и вызывает деформацию изгиб в плоскости  $ZOX$ .

Для практического вычисления шести внутренних силовых факторов в самом общем случае нагружения надо составить шесть уравнений равновесия, а именно:

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} + N_z = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} + Q_x = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} + Q_y = 0;$$

$$\sum_{j=1}^m M_{jz} + M_z = 0; \quad \sum_{j=1}^m M_{jx} + M_x = 0; \quad \sum_{j=1}^m M_{jy} + M_y = 0.$$

Порядок определения внутренних усилий следующий:

1. Определить опорные реакции (если есть такая необходимость).
2. Разбить конструкцию на силовые участки. Под силовым участком понимается часть стержня, в пределах которого тот или иной силовой фактор изменяется по одному закону. Границами силовых участков являются:

- начало и конец стержня;
- сечения, где продольная ось стержня меняет направление;
- сечения стержня, где приложены сосредоточенные силы;
- сечения стержня, где приложены сосредоточенные моменты;
- сечения стержня, где начинает или заканчивает действовать распределенная нагрузка.

3. На каждом силовом участке провести произвольное сечение и одну из частей мысленно отбросить (удобнее отбрасывать наиболее нагруженную часть конструкции, или ту, где есть неизвестные опорные реакции).

4. Влияние отброшенной части на оставшуюся заменить совокупностью всех шести внутренних усилий.

5. Определить внутренние усилия, составив соответствующие уравнения статики.

6. Построить эпюры внутренних усилий.

*Эпюра* – это график, показывающий изменение внутреннего усилия по длине стержня.

В **Приложении А** представлены варианты заданий для самостоятельного решения задач по рассматриваемой теме.

## Задача 1

Определить значения внутренних усилий и построить их эпюры для стержня (рисунок 1.4), если  $F=5$  кН,  $q=40$  кН/м.

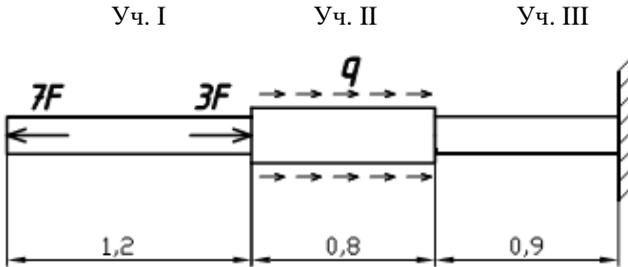


Рисунок 1.4

Стержень имеет три силовых участка. На каждом участке проводим произвольное сечение и отбрасываем правую часть, т. к. там находятся неизвестные нам опорные реакции, определять которые по условию задачи не требуется (рисунки 1.5 – 1.7).

К оставшейся левой части прикладываем совокупность шести внутренних усилий и составляем шесть уравнений статики.

### **Правило знаков для продольной силы $N_z$ :**

*если внешняя нагрузка вызывает деформацию растяжения рассматриваемого участка стержня, то в выражении для определения  $N_z$  она дает положительное слагаемое, и наоборот, если вызывает деформацию сжатия, то дает отрицательное слагаемое.*

### Участок I

$$0 \leq z_1 \leq 1,2$$

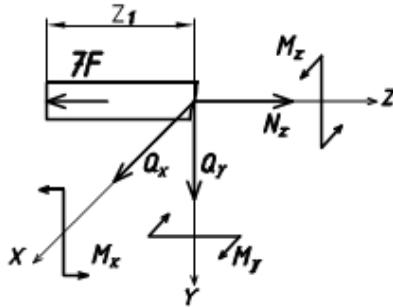


Рисунок 1.5

- 1)  $\sum F_z = 0;$   $N_z - 7F = 0. \quad N_z = 7F = 35 (\text{кН}).$
- 2)  $\sum F_x = 0;$   $Q_x = 0.$
- 3)  $\sum F_y = 0;$   $Q_y = 0.$
- 4)  $\sum M_z = 0;$   $M_z = 0.$
- 5)  $\sum M_x = 0;$   $M_x = 0.$
- 6)  $\sum M_y = 0;$   $M_y = 0.$

### Участок II

$$0 \leq z_2 \leq 0,8$$

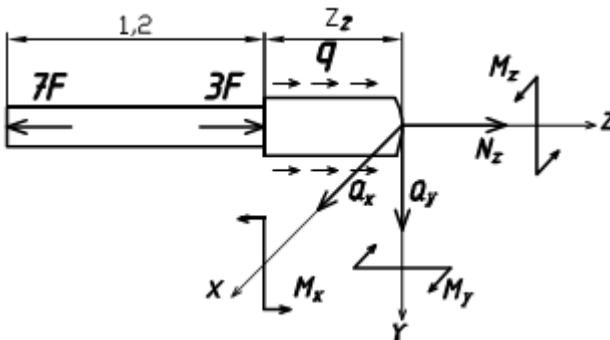


Рисунок 1.6

$$1) \sum F_z = 0; \quad N_z - 7F + 3F + q \cdot z_2 = 0.$$

$$N_z = 7F - 3F - q \cdot z_2.$$

$$\text{При } z_2 = 0 \quad N_z = 35 - 15 - 0 = 20 \text{ (кН)}.$$

$$\text{При } z_2 = 0,8 \text{ м} \quad N_z = 35 - 15 - 40 \cdot 0,8 = -12 \text{ (кН)}.$$

$$2) \sum F_x = 0; \quad Q_x = 0.$$

$$3) \sum F_y = 0; \quad Q_y = 0.$$

$$4) \sum M_z = 0; \quad M_z = 0.$$

$$5) \sum M_x = 0; \quad M_x = 0.$$

$$6) \sum M_y = 0; \quad M_y = 0.$$

Участок III

$$0 \leq z_3 \leq 0,9$$

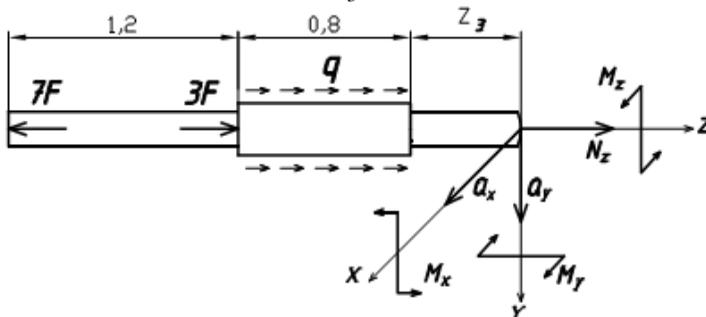


Рисунок 1.7

$$1) \sum F_z = 0; \quad N_z - 7F + 3F + q \cdot 0,8 = 0.$$

$$N_z = 7F - 3F - q \cdot 0,8 = 35 - 15 - 32 = -12 \text{ (кН)}.$$

$$2) \sum F_x = 0; \quad Q_x = 0.$$

$$3) \sum F_y = 0; \quad Q_y = 0.$$

$$4) \sum M_z = 0; \quad M_z = 0.$$

$$5) \sum M_x = 0; \quad M_x = 0.$$

$$6) \sum M_y = 0; \quad M_y = 0.$$

Знак «минус», полученный для продольной силы на участках II и III, говорит о том, что действительное направление продольной силы  $N_z$  не совпадает с принятым на рисунках 1.6 и 1.7. На самом деле продольная сила  $N_z$  направлена в противоположную сторону и вызывает сжатие данного участка. Знак «плюс», полученный для продольной силы на участках I и II, говорит о том, что действительное направление  $N_z$  совпадает с направлением, выбранным на рисунке 1.5 и 1.6 и вызывает растяжение данных участков стержня.

Наглядное представление о законе изменения продольных сил по длине стержня дает эпюра. Нулевая линия (база) проводится параллельно оси стержня, а ось ординат – перпендикулярно базе. По оси ординат в выбранном масштабе откладываются значения продольных сил с учетом знаков (рисунок 1.8).

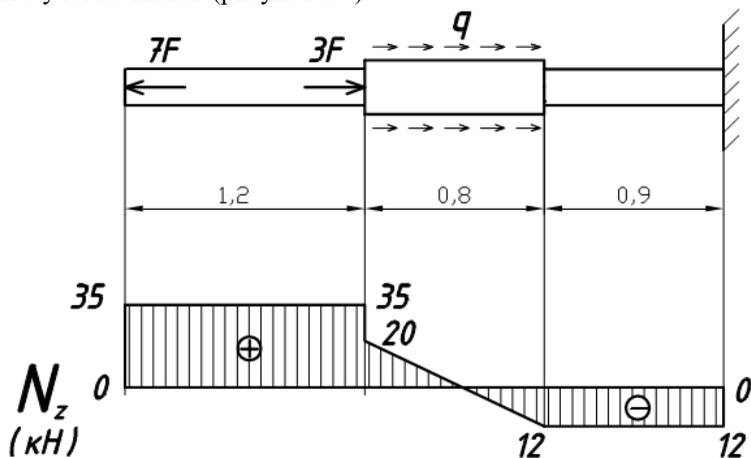


Рисунок 1.8

Положительные значения продольных сил  $N_z$  откладывают вверх от нулевой линии, отрицательные – вниз. В тех сечениях стержня, где приложены внешние сосредоточенные силы, на эпюре продольных сил получают «скачки», равные величине этих сил. На тех участках стержня, где действует распределенная нагрузка, эпюра продольных сил ограничивается наклонной прямой; там, где распределенная нагрузка отсутствует, эпюра ограничивается прямой, параллельной базе.

## Задача 2

К стержню приложены сосредоточенные скручивающие моменты (рисунок 1.9). Необходимо определить значения внутренних усилий и построить их эпюры, если  $M=4$  кНм.

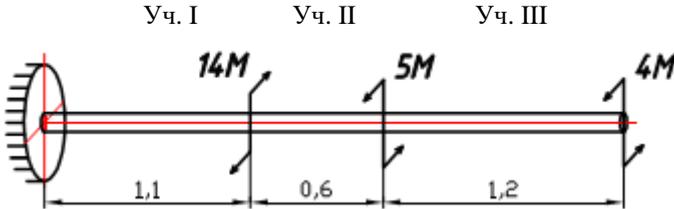


Рисунок 1.9

Стержень имеет три силовых участка.

На каждом участке проводим произвольное сечение и отбрасываем левую часть, т. к. там находятся неизвестные нам опорные реакции, определять которые по условию задачи не требуется. К оставшейся правой части прикладываем совокупность шести внутренних силовых факторов и составим уравнения статики. Так как стержень нагружен внешними моментами, плоскость действия которых перпендикулярна продольной оси стержня, то отличен от нуля будет только один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M_z$ .

### ***Правило знаков для крутящего момента $M_z$ :***

*Если внешняя нагрузка создает крутящий момент относительно оси  $Z$ , действующий против часовой стрелки, то в выражении для  $M_z$  она дает отрицательное слагаемое; если по часовой стрелке, то дает положительное слагаемое. Смотреть необходимо со стороны отброшенной части стержня (т. е. со стороны положительного направления оси  $Z$ ).*

Участок I

$$0 \leq z_1 \leq 1,1$$

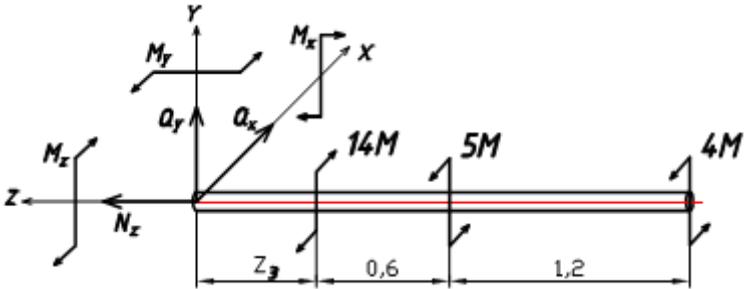


Рисунок 1.10

- 1)  $\sum F_z = 0;$        $N_z = 0.$
- 2)  $\sum F_x = 0;$        $Q_x = 0.$
- 3)  $\sum F_y = 0;$        $Q_y = 0.$
- 4)  $\sum M_z = 0;$        $M_z + 14M - 5M - 4M = 0.$

$$M_z = -14M + 5M + 4M = -5M = -5 \cdot 4 = -20 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

- 5)  $\sum M_x = 0;$        $M_x = 0.$
- 6)  $\sum M_y = 0;$        $M_y = 0.$

Участок II

$$0 \leq z_2 \leq 0,6$$

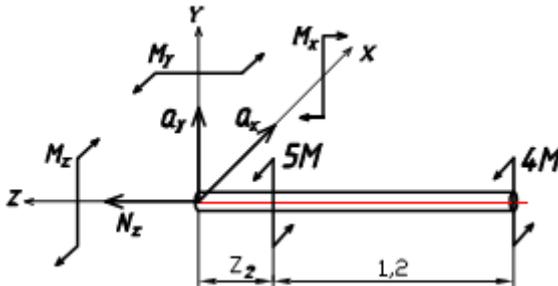


Рисунок 1.11

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sum F_z &= 0; & N_z &= 0. \\
 2) \quad \sum F_x &= 0; & Q_x &= 0. \\
 3) \quad \sum F_y &= 0; & Q_y &= 0. \\
 4) \quad \sum M_z &= 0; & M_z - 5M - 4M &= 0.
 \end{aligned}$$

$$M_z = 5M + 4M = 9M = 9 \cdot 4 = 36 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \sum M_x &= 0; & M_x &= 0. \\
 6) \quad \sum M_y &= 0; & M_y &= 0.
 \end{aligned}$$

### Участок III

$$0 \leq z_2 \leq 1,2$$

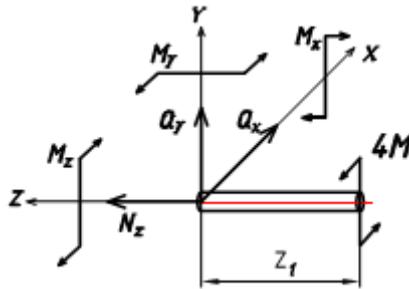


Рисунок 1.12

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sum F_z &= 0; & N_z &= 0. \\
 2) \quad \sum F_x &= 0; & Q_x &= 0. \\
 3) \quad \sum F_y &= 0; & Q_y &= 0. \\
 4) \quad \sum M_z &= 0; & M_z - 4M &= 0.
 \end{aligned}$$

$$M_z = 4M = 4 \cdot 4 = 16 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \sum M_x &= 0; & M_x &= 0. \\
 6) \quad \sum M_y &= 0; & M_y &= 0.
 \end{aligned}$$

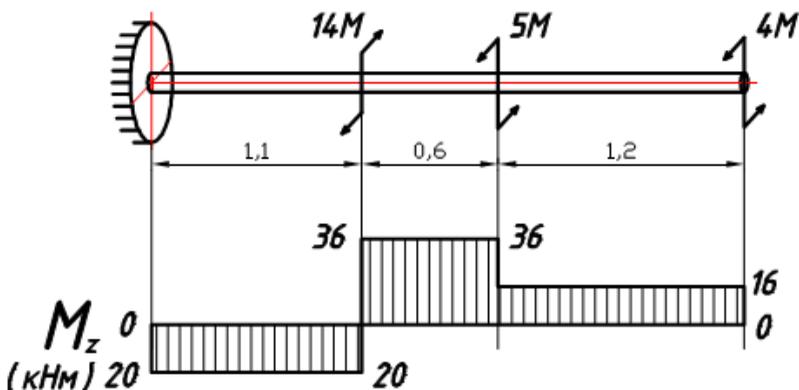


Рисунок. 1.13

Знак «минус», полученный для крутящего момента  $M_z$  на участке I, говорит о том, что действительное направление крутящего момента не совпадает с принятым на рисунке 1.10. На самом деле крутящий момент  $M_z$  направлен в противоположную сторону. Знак «плюс», полученный для крутящего момента  $M_z$  на участках II и III, говорит о том, что действительное направление  $M_z$  совпадает с направлением, выбранным на рисунке 1.11 и 1.12. Эпюра крутящих моментов (рисунок 1.13) строится аналогично эпюрам продольных сил.

В тех сечениях стержня, где приложены внешние сосредоточенные моменты, на эпюре крутящих моментов получаются «скачки», равные величине этих моментов.

### Задача 3

Балка – это прямолинейный стержень, работающий на изгиб. Балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q=10$  (кН/м), сосредоточенной силой  $F=8$  (кН) и сосредоточенным моментом  $M=20$  (кНм) (рисунок 1.14). Необходимо определить значения внутренних усилий и построить их эпюры.

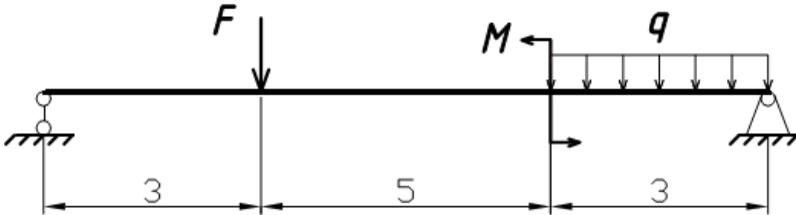


Рисунок 1.14

Заданная балка имеет шарнирно-подвижную опору А и шарнирно-неподвижную опору В, в которых возникают реакции  $R_A$ ,  $R_B$  и  $H_B$ .

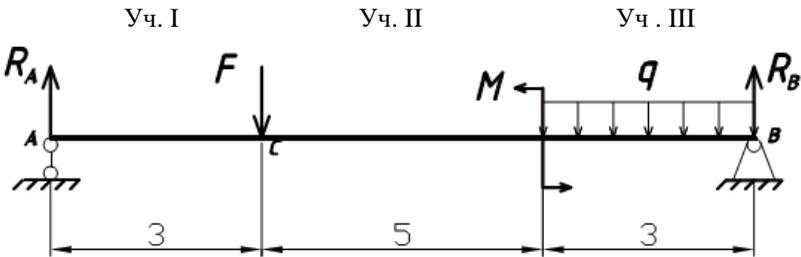


Рисунок 1.15

Определим значения и направления этих реакций. Для этого зададимся их произвольным направлением и составим уравнения моментов относительно опорных точек А и В (рисунок 1.15).

$$\sum M_A = 0 \quad -F \cdot 3 + M - q \cdot 3 \cdot 9,5 + R_B \cdot 11 = 0.$$

$$R_B = \frac{F \cdot 3 - M + q \cdot 3 \cdot 9,5}{11} = \frac{8 \cdot 3 - 20 + 10 \cdot 3 \cdot 9,5}{11} = 26,27 \text{ (кН)}.$$

$$\sum M_B = 0 \quad -R_A \cdot 11 + F \cdot 8 + M + q \cdot 3 \cdot 1,5 = 0.$$

$$R_A = \frac{F \cdot 8 + M + q \cdot 3 \cdot 1,5}{11} = \frac{8 \cdot 8 + 20 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5}{11} = 11,73 \text{ (кН)}.$$

$$\sum F_z = 0 \quad H_A = 0.$$

После определения опорных реакций делается проверка. Для этого составляется уравнение  $\sum M_C = 0$ . Если тождество выполняется, то опорные реакции определены верно.

### **ПРОВЕРКА**

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 \quad -R_A \cdot 3 + M + q3 \cdot 6,5 + R_B \cdot 8 = 0. \\ -11,73 \cdot 3 + 20 - 10 \cdot 3 \cdot 6,5 + 26,27 \cdot 8 = -0,03 \approx 0. \end{aligned}$$

Тождество выполняется, значит, опорные реакции определены верно.

Если при определении  $R_A$  и  $R_B$  получились положительные значения, то это значит, что их действительное направление будет совпадать с принятым на рисунке 1.15. Если значение опорной реакции получилось отрицательным, то предлагается первоначально выбранное направление реакции зачеркнуть, направить в противоположную сторону и в дальнейшем считать положительным.

Заданная конструкция имеет три силовых участка. На каждом участке проводится произвольное сечение, и одна из частей отбрасывается. Удобнее отбрасывать ту часть, которая содержит большее количество нагрузок. Влияние отброшенной части заменяется совокупностью шести внутренних силовых факторов, которые можно определить, составив возможные уравнения статики. Из шести возможных для данной задачи отличными от нуля будут только поперечная сила  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_x$ .

Для практических вычислений внутренних усилий используют правила знаков.

### **Правило знаков для поперечной силы $Q_y$ :**

*Если внешняя сила стремится повернуть рассматриваемую часть конструкции относительно сечения по часовой стрелке, то в выражение для  $Q_y$  на данном участке она дает положительное слагаемое. И наоборот, если внешняя нагрузка стремится повернуть рассматриваемую часть конструкции относительно сечения против часовой стрелки, то в выражение для  $Q_y$  на данном участке она дает отрицательное слагаемое (рисунок 1.16)*

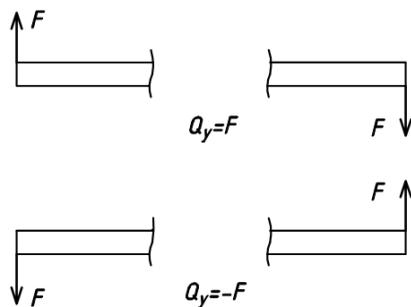


Рисунок 1.16

**Правило знаков для изгибающего момента  $M_x$  :**

Если внешняя нагрузка вызывает сжатие верхних волокон балки при закреплённом сечении, то в выражение  $M_x$  на данном участке она даёт положительное слагаемое. И наоборот, если внешняя нагрузка вызывает сжатие нижних волокон балки, то в выражение  $M_x$  на данном участке она даёт отрицательное слагаемое (рисунок 1.17).

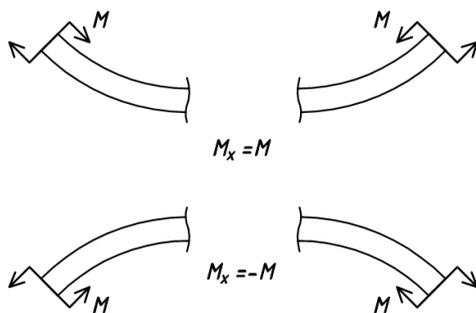


Рисунок 1.17

Участок I  
 $0 \leq z_1 \leq 3$

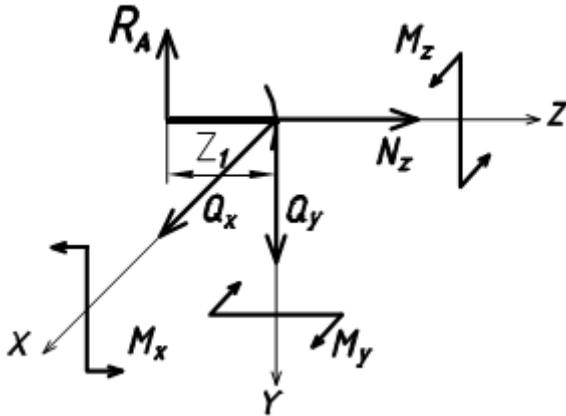


Рисунок 1.18

- 1)  $\sum F_z = 0;$        $N_z = 0$  .
- 2)  $\sum F_x = 0;$        $Q_x = 0$  .
- 3)  $\sum F_y = 0;$        $Q_y - R_A = 0$  .  $Q_y = R_A = 11,73$  (кН).
- 4)  $\sum M_z = 0;$        $M_z = 0$  .
- 5)  $\sum M_x = 0;$        $M_x - R_A \cdot z_1 = 0$  .  $M_x = R_A \cdot z_1$  .

При  $z_1 = 0$ ,       $M_x = 11,73 \cdot 0 = 0$  (кН·м).

При  $z_1 = 3$  м,       $M_x = 11,73 \cdot 3 = 35,19$  (кН·м).

- 6)  $\sum M_y = 0;$        $M_y = 0$  .

Из результатов расчета видно, что на I участке перерезывающее усилие  $Q_y$  будет постоянным, а изгибающий момент  $M_x$  представляется линейной функцией от осевой координаты  $z$ .

Для определения внутренних усилий по всей длине балки такие же действия повторяют на каждом силовом участке.

Участок II  
 $0 \leq z_2 \leq 5$

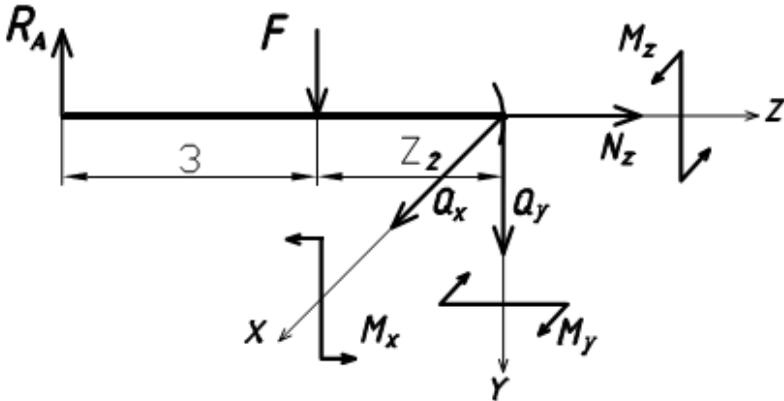


Рисунок 1.19

$$1) \sum F_z = 0; \quad N_z = 0.$$

$$2) \sum F_x = 0; \quad Q_x = 0.$$

$$3) \sum F_y = 0; \quad Q_y - R_A + F = 0.$$

$$Q_y = R_A - F = 11,73 - 8 = 3,73 \text{ (кН)}.$$

$$4) \sum M_z = 0; \quad M_z = 0.$$

$$5) \sum M_x = 0; \quad M_x - R_A \cdot (3 + z_2) + F \cdot z_2 = 0.$$

$$M_x = R_A \cdot (3 + z_2) - F \cdot z_2.$$

$$\text{При } z_1 = 0, \quad M_x = 11,73 \cdot 3 - F \cdot 0 = 35,19 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

$$\text{При } z_1 = 5 \text{ м, } \quad M_x = 11,73 \cdot 8 - 8 \cdot 5 = 93,84 - 40 = 53,84 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

$$6) \sum M_y = 0; \quad M_y = 0.$$

Результат расчета показывает, что на втором участке перерезывающее усилие  $Q_y$  есть постоянная величина, а изгибающий момент  $M_x$  представляется линейной функцией от осевой координаты  $z$ .

Участок III  
 $0 \leq z_3 \leq 3$

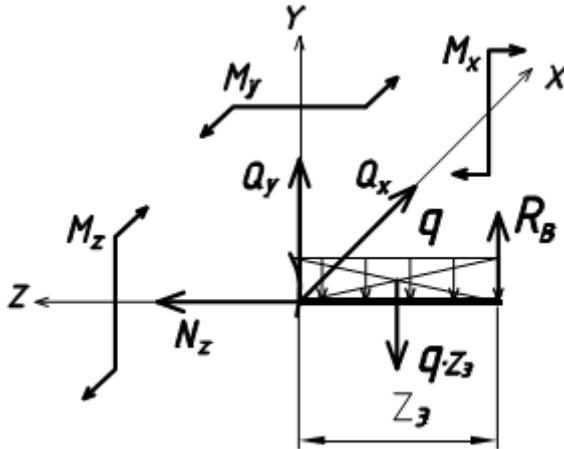


Рисунок 1.20

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sum F_z &= 0; & N_z &= 0. \\
 2) \quad \sum F_x &= 0; & Q_x &= 0. \\
 3) \quad \sum F_y &= 0; & Q_y + R_B - q \cdot z_3 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$Q_y = -R_B + q \cdot z_3 = 0.$$

При  $z_3 = 0$ ,  $Q_y = -26,27 + 10 \cdot 0 = -26,27$  (кН).

При  $z_3 = 3$  м,  $Q_y = -26,27 + 10 \cdot 3 = 3,73$  (кН).

$$4) \quad \sum M_z = 0; \quad M_z = 0.$$

$$5) \quad \sum M_x = 0; \quad M_x - R_B \cdot z_3 + q \cdot z_3 \cdot \frac{z_3}{2} = 0.$$

$$M_x = R_B \cdot z_3 - q \cdot z_3 \cdot \frac{z_3}{2} = 0.$$

При  $z_3 = 0$ ,  $M_x = 26,27 \cdot 0 - 10 \cdot 0 = 0$  (кН · м).

При  $z_3 = 3$  м,  $M_x = 26,27 \cdot 3 - 10 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 78,81 - 45 = 33,81$  (кН · м).

$$6) \sum M_y = 0; \quad M_y = 0.$$

Результат расчета показывает, что перерезывающее усилие  $Q_y$  на III участке меняется по линейному закону, а изгибающий момент  $M_x$  – по закону квадратной параболы. Кроме того, на участке III функция  $Q_y$  меняет знак с плюса на минус, принимая в некотором сечении с координатой  $z_3^*$  нулевое значение. Значит, функция  $M_x$  в этом сечении имеет экстремум. Чтобы определить экстремальное значение момента, надо приравнять функцию  $Q_y$  к нулю на этом участке и определить координату  $z_3^*$ , т. е. определить, где именно данная функция  $Q_y$  равна нулю.

$$Q_y = -R_B + q \cdot z_3^* = 0 \quad z_3^* = \frac{R_B}{q} = 2,627 \text{ (м)}.$$

Подставив эту координату  $z_3^*$  в выражение  $M_x$  для данного участка, определим экстремальное значение момента.

При  $z_3^* = 2,627 \text{ (м)}$ ,

$$M_x = 26,27 \cdot 2,627 - 10 \cdot 2,627 \cdot \frac{2,627}{2} = 69,01 - 34,51 = 34,5 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

По полученным результатам строятся эпюры внутренних усилий (рисунок 1.21).

*Эпюра изгибающих моментов  $M_x$  строится со стороны сжатых волокон.*

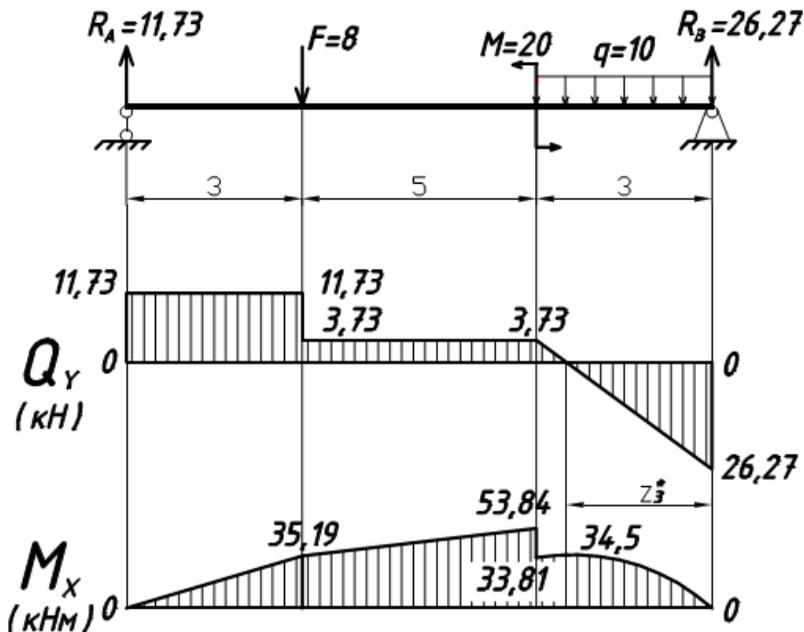


Рисунок 1.21

Следует отметить, что в сечении, где приложен момент  $M=20\text{кНм}$ , на эпюре  $M_x$  должен быть "скачок" на  $20\text{кНм}$ , а мы получили "скачок" на  $20,03\text{кНм}$ . Такая погрешность связана с округлением результатов при определении опорных реакций.

После построения эпюр необходимо проверить их правильность. Для этого используются дифференциальные зависимости

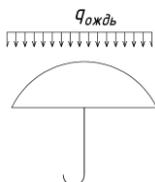
$$\frac{dQ}{dz} = q, \quad \frac{dM}{dz} = Q, \quad \frac{d^2 M}{dz^2} = q.$$

### **Особенности эпюр $Q_y$ , $M_x$ .**

1. В тех сечениях балки, где действует сосредоточенная сила  $F$  или реакция опоры  $R$ , на эпюре поперечных сил  $Q_y$  должен быть скачок на величину этой силы и в направлении действия этой силы.

2. В тех сечениях балки, где применен сосредоточенный момент  $M$ , на эпюре изгибающих моментов  $M_x$  должен быть скачок на величину этого момента, а на эпюре  $Q_y$  никаких изменений нет.

3. Если на участке балки действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ , то эпюра  $Q_y$  имеет вид наклонной прямой, а эпюра  $M_x$  имеет вид квадратной параболы, выпуклостью направленной навстречу действия распределенной нагрузки  $q$  (правило "дождя").



Поперечная сила  $Q_y$  на данном участке изменяется на величину равнодействующей распределенной нагрузки.

4. Если на участке балки равномерно распределенная нагрузка  $q$  отсутствует, то эпюра  $Q_y$  имеет вид прямой, параллельной нулевой линии эпюры, а эпюра  $M_x$  имеет вид наклонной прямой.

5. Если на участке балки, где действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ , в некотором сечении эпюра  $Q_y$  пересекает нулевую линию, то на эпюре  $M_x$  в этом сечении должен быть экстремум.

6. Если на участке балки эпюра  $Q_y > 0$  (положительна), то эпюра  $M_x$  на этом участке возрастает (слева направо). Если эпюра  $Q_y < 0$  (отрицательна), то эпюра  $M_x$  убывает.

## Задача 4

Рама нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q=16$  кН/м, сосредоточенной силой  $F=20$  кН, и сосредоточенным моментом  $M=10$  кНм (рисунок 1.22). Определить значения внутренних усилий и построить их эпюры.

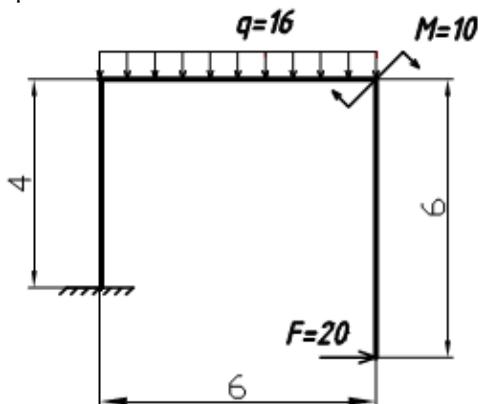


Рисунок 1.22

Рама имеет жесткое защемление (рисунок 1.23), где возникают опорные реакции:  $R_A$ ,  $H_A$  и  $M_A$ . Расчет начнем с горизонтального участка рамы. Так как неизвестные опорные реакции находятся в левой части рамы, значит, левую часть мы отбросим, а рассмотрим правую.

Уч. I

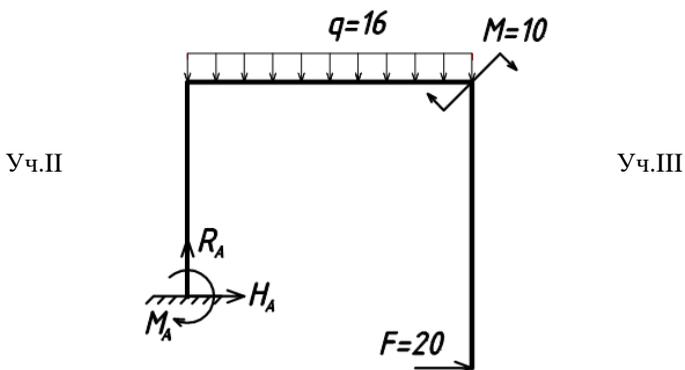


Рисунок 1.23

Участок I  
 $0 \leq z_1 \leq 6$

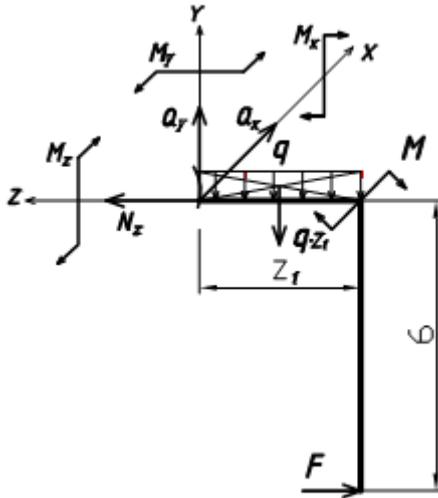


Рисунок 1.23

$$1) \sum F_z = 0; \quad N_z - F = 0; \quad N_z = F = 20 \text{ (кН)}.$$

$$2) \sum F_x = 0; \quad Q_x = 0.$$

$$3) \sum F_y = 0; \quad Q_y - q \cdot z_1 = 0; \quad Q_y = q \cdot z_1 = 0.$$

При  $z_1 = 0$ ,  $Q_y = 0$  (кН).

При  $z_1 = 6$ ,  $Q_y = 16 \cdot 6 = 96$  (кН).

$$4) \sum M_z = 0; \quad M_z = 0.$$

$$5) \sum M_x = 0; \quad M_x + q \cdot z_1 \frac{z_1}{2} + M - F \cdot 6 = 0.$$

$$M_x = -q \cdot z_1 \frac{z_1}{2} - M + F \cdot 6 = 0.$$

При  $z_1 = 0$ ,  $M_x = -16 \cdot 0 \cdot \frac{0}{2} - 10 + 20 \cdot 6 = 110$  (кН·м).

При  $z_1 = 6$  м,  $M_x = -16 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} - 10 + 120 = -178$  (кН·м).

$$6) \sum M_y = 0; \quad M_y = 0.$$

Участок II

$$0 \leq z_2 \leq 4$$

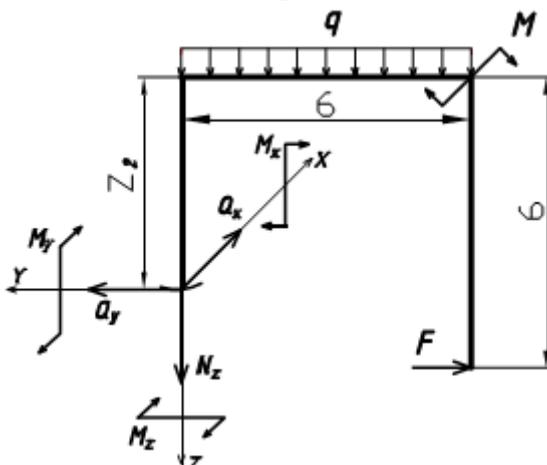


Рисунок 1.24

$$1) \sum F_z = 0; \quad N_z + q \cdot 6 = 0.$$

$$N_z = -q \cdot 6 = 96 \text{ (кН)}.$$

$$2) \sum F_x = 0; \quad Q_x = 0.$$

$$3) \sum F_y = 0; \quad Q_y - F = 0.$$

$$Q_y = F = 20 \text{ (кН)}.$$

$$4) \sum M_z = 0; \quad M_z = 0.$$

$$5) \sum M_x = 0; \quad M_x + q \cdot 6 \cdot 3 + M - F(6 - z_2) = 0.$$

$$M_x = -q \cdot 6 \cdot 3 - M + F(6 - z_2) = 0.$$

$$\text{При } z_2 = 0, \quad M_x = -16 \cdot 18 - 10 + 120 = -178 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

$$\text{При } z_2 = 4, \quad M_x = -16 \cdot 18 - 10 + 40 = -258 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

$$6) \sum M_y = 0; \quad M_y = 0.$$

Участок III  
 $0 \leq z_3 \leq 6$

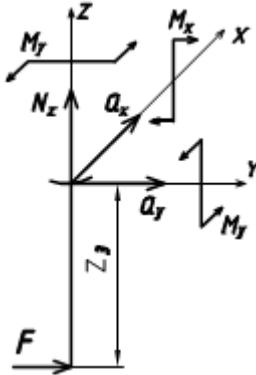


Рисунок 1.25

$$\begin{aligned} 1) \sum F_z &= 0; & N_z &= 0. \\ 2) \sum F_x &= 0; & Q_x &= 0. \\ 3) \sum F_y &= 0; & Q_y + F &= 0. \end{aligned}$$

$$Q_y = -F = -20 \text{ (кН)}.$$

$$\begin{aligned} 4) \sum M_z &= 0; & M_z &= 0. \\ 5) \sum M_x &= 0; & M_x - F \cdot z_3 &= 0; & M_x &= F \cdot z_3. \end{aligned}$$

$$\text{При } z_1 = 0, \quad M_x = 20 \cdot 0 = 0 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

$$\text{При } z_1 = 6 \text{ м,} \quad M_x = 20 \cdot 6 = 120 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

$$6) \sum M_y = 0; \quad M_y = 0.$$

По полученным данным строятся эпюры внутренних усилий (рисунок 1.26).

Положительные значения продольных сил  $N_z$  на эпюре принято откладывать с внешней стороны рамы, если ее можно определить, а отрицательные – с внутренней, но обязательно надо указывать знак

деформаций (знак "+" показывает, что данный участок растянут, а знак "-" показывает, что данный участок сжат).

Положительные значения поперечных сил  $Q_y$  откладываются в направлении оси Y, а отрицательные – в противоположную сторону.

Эпюра  $M_x$  строится со стороны сжатых волокон.

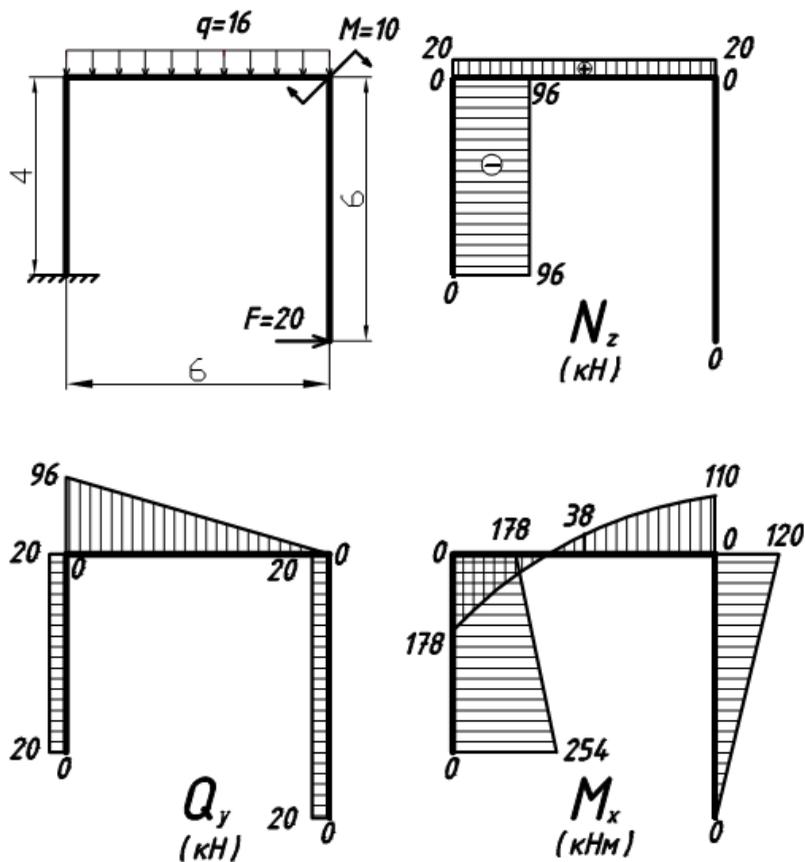


Рисунок 1.26

## Глава 2. Расчеты на прочность при растяжении (сжатии)

При работе бруса на растяжение (сжатие) в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – *продольная сила*  $N_z$ , представляющая собой равнодействующую внутренних нормальных сил, возникающих в поперечном сечении бруса.

Для расчета на прочность и для определения перемещений поперечных сечений бруса надо знать закон изменения продольных сил по его длине.

*Продольная сила в произвольном поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме проекций на его продольную ось всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения (на отсеченную часть бруса).*

При растяжении продольную силу принято считать положительной.

Закон изменения продольной силы по длине бруса целесообразно представлять в виде графика – эпюры продольных сил. При построении этого графика аргументом является координата поперечного сечения, а функцией – продольная сила.

Так же, как и при других видах деформации, расчеты на прочность при растяжении (сжатии) в зависимости от постановки задачи (цель расчета) могут быть разделены на три категории:

- а) проверка прочности (проверочный расчет);
- б) определение допускаемой нагрузки (разновидность проверочного расчета);
- в) определение требуемых размеров поперечного сечения бруса (проектный расчет).

При проверочном расчете нагрузки размеры и материал (допускаемое или предельное напряжения) известны. В результате расчета определяется наибольшее расчетное напряжение и сравнивается с допускаемым.

Следует заметить, что для брусьев из материалов, которые неодинаково сопротивляются растяжению и сжатию (например, чугун), опасным может оказаться не то сечение, где возникают наибольшие (по абсолютной величине) напряжения. *Опасным является сечение, для которого коэффициент запаса прочности минимален.*

Если использование только уравнений равновесия для отсеченной части бруса или какой-либо системы не позволяет определить внут-

ренние силы, систему называют *статически неопределимой*. Для ее решения необходимо составить помимо уравнений статики уравнения перемещений, основанные на рассмотрении геометрической стороны деформации системы и использовании закона Гука.

В **Приложении Б** представлены варианты заданий для самостоятельного решения задач по рассматриваемой теме.

### Задача 2.1

Стальной стержень ступенчатого сечения (рисунок 2.1) нагружен сосредоточенными силами  $F_1=35$  (кН),  $F_2=15$  (кН) и равномерно распределенной нагрузкой  $q=40$  (кН/м).

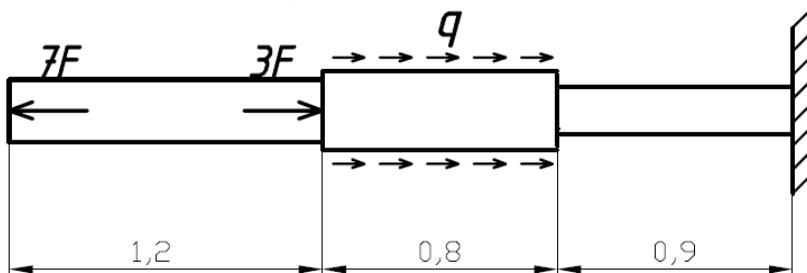


Рисунок 2.1

**Требуется:** построить эпюры продольных сил  $N_z$ , эпюры напряжений  $\sigma$  и эпюру осевых перемещений  $u$ .

**Решение.** Стержень имеет три силовых участка (рисунок 2.2). На каждом участке проведем сечение и составим уравнения статики для определения продольной силы  $N_z$ .

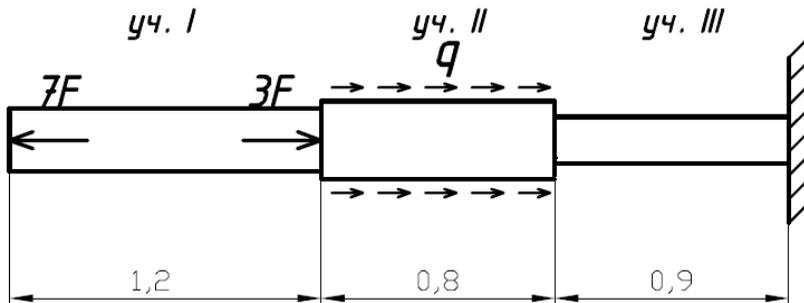


Рисунок 2.2

1. Определим продольную силу  $N_z$ .

**Участок I**

$$0 \leq z_1 \leq 1,2$$

$$\sum F_z = 0; \quad N_z - 7F = 0. \quad N_z = 7F = 35 \text{ (кН)}.$$

**Участок II**

$$0 \leq z_2 \leq 0,8$$

$$\sum F_z = 0; \quad N_z - 7F + 3F + q \cdot z_2 = 0. \quad N_z = 7F - 3F - q \cdot z_2.$$

При  $z_2 = 0$ ,  $N_z = 35 - 15 - 0 = 20 \text{ (кН)}$ .

При  $z_2 = 0,8 \text{ м}$ ,  $N_z = 35 - 15 - 40 \cdot 0,8 = -12 \text{ (кН)}$ .

Определим координату сечения  $z^*$ , где эпюра  $N_z$  пересекает нулевую линию. Для этого приравняем уравнение  $N_z$  к нулю на этом участке.

$$N_z = 7F - 3F - q \cdot z_2^* = 0, \quad 7 \cdot 5 - 3 \cdot 5 - q \cdot z_2^* = 20 - q \cdot z_2^* = 0,$$

$$z_2^* = 0,5 \text{ (м)}.$$

**Участок III**

$$0 \leq z_3 \leq 0,9$$

$$\sum F_z = 0; \quad N_z - 7F + 3F + q \cdot 0,8 = 0.$$

$$N_z = 7F - 3F - q \cdot 0,8 = 35 - 15 - 32 = -12 \text{ (кН)}.$$

По полученным значениям строим эпюру  $N_z$ .

2. Определим нормальные напряжения  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{N_z}{A}.$$

**Участок I**

На первом участке  $N_z = 35 \text{ (кН)}$ , тогда

$$\sigma = \frac{35 \cdot 10^3 \text{ (Н)}}{20 \cdot 10^{-4} \text{ (м}^2\text{)}} = 1,75 \cdot 10^7 \left( \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right) = 17,5 \cdot 10^6 = 17,5 \text{ (МПа)}.$$

### Участок II

На втором участке продольная сила меняется по линейному закону: в начале участка  $N_z=20$  (кН), в конце участка  $N_z=-12$  (кН). Тогда напряжения  $\sigma$  надо определить в начале и в конце участка.

$$\text{В начале } \sigma = \frac{20 \cdot 10^3 (H)}{25 \cdot 10^{-4} (M^2)} = 0,8 \cdot 10^7 \left( \frac{H}{M^2} \right) = 8,0 \cdot 10^6 = 8,0 (МПа).$$

$$\text{В конце } \sigma = \frac{-12 \cdot 10^3 (H)}{25 \cdot 10^{-4} (M^2)} = -0,48 \cdot 10^7 \left( \frac{H}{M^2} \right) = -4,8 \cdot 10^6 = -4,8 (МПа)$$

### Участок III

На третьем участке  $N_z=-12$  (кН), тогда

$$\sigma = \frac{-12 \cdot 10^3 (H)}{10 \cdot 10^{-4} (M^2)} = -1,2 \cdot 10^7 \left( \frac{H}{M^2} \right) = -12,0 \cdot 10^6 = -12,0 (МПа).$$

По полученным данным строим эпюру нормальных напряжений  $\sigma$  (рисунок 2.4).

### 3. Определим перемещения сечений бруса.

Чтобы построить эпюру перемещений, надо знать деформацию каждого участка стержня, которую можно определить по формуле:

$$\Delta l = \frac{N_z \cdot l}{E \cdot A}.$$

При определении абсолютной деформации участков стержня, в пределах которых продольная сила переменна, удобно пользоваться следующей формулой:

$$\Delta l = \int_l \frac{N_z(z)}{E \cdot A} dz = \frac{1}{E} \int \sigma dz = \frac{1}{E} A_{\sigma},$$

где  $A_{\sigma}$  – площадь эпюры напряжений на данном участке стержня.

$$\Delta l = \frac{35 \cdot 10^3 (H) \cdot 1,2 (M)}{2 \cdot 10^{11} (Па) \cdot 20 \cdot 10^{-4} (M^2)} = 1,05 \cdot 10^{-4} (M).$$

$$\Delta l^{II} = \frac{(8-4,8) \cdot 10^6 (\text{Па}) \cdot 0,8(\text{м})}{2 \cdot 10^{11} (\text{Па})} = 0,064 \cdot 10^{-4} (\text{м}) .$$

$$\Delta l^{III} = \frac{-12 \cdot 10^3 (\text{Н}) \cdot 0,9 (\text{м})}{2 \cdot 10^{11} (\text{Па}) \cdot 10 \cdot 10^{-4} (\text{м}^2)} = 0,54 \cdot 10^{-4} (\text{м}) .$$

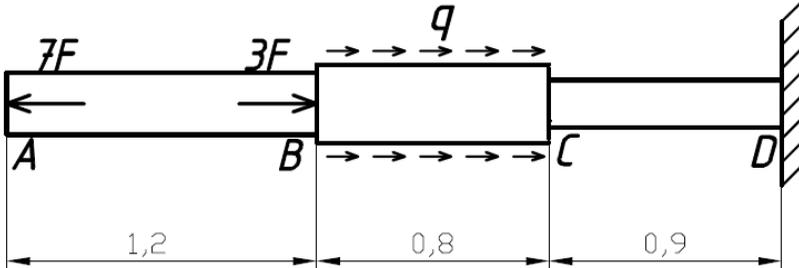


Рисунок 2.3

$$U_D = 0;$$

$$U_C = \Delta l^{III} = -0,54 \cdot 10^{-4} (\text{м}) .$$

$$U_B = U_C + \Delta l^{II} = -0,54 \cdot 10^{-4} + 0,064 \cdot 10^{-4} = -0,476 (\text{м}) .$$

$$U_A = U_B + \Delta l^I = -0,476 \cdot 10^{-4} + 1,05 \cdot 10^{-4} (\text{м}) = 0,574 \cdot 10^{-4} (\text{м}) .$$

Для правильного построения эпюры осевых перемещений необходимо использовать дифференциальные уравнения растяжения (сжатия) стержня:

$$E \cdot A \frac{dU}{dz} = N_z(z) . \text{ При } E \cdot A = \text{const} , \quad E \cdot A \cdot U''(z) = -q(z) .$$

Из этих соотношений следует, что на участках стержня, где  $q=0$ , осевые перемещения меняются по линейному закону, а на участках, где  $q=\text{const}$  - по закону квадратной параболы. В сечениях где продольная сила  $N_z$  равна нулю, осевые перемещения имеют экстремум. В нашем случае эпюра перемещений будет иметь экстремум на втором участке в сечении с координатой  $z^*=0,5 \text{ м}$ .

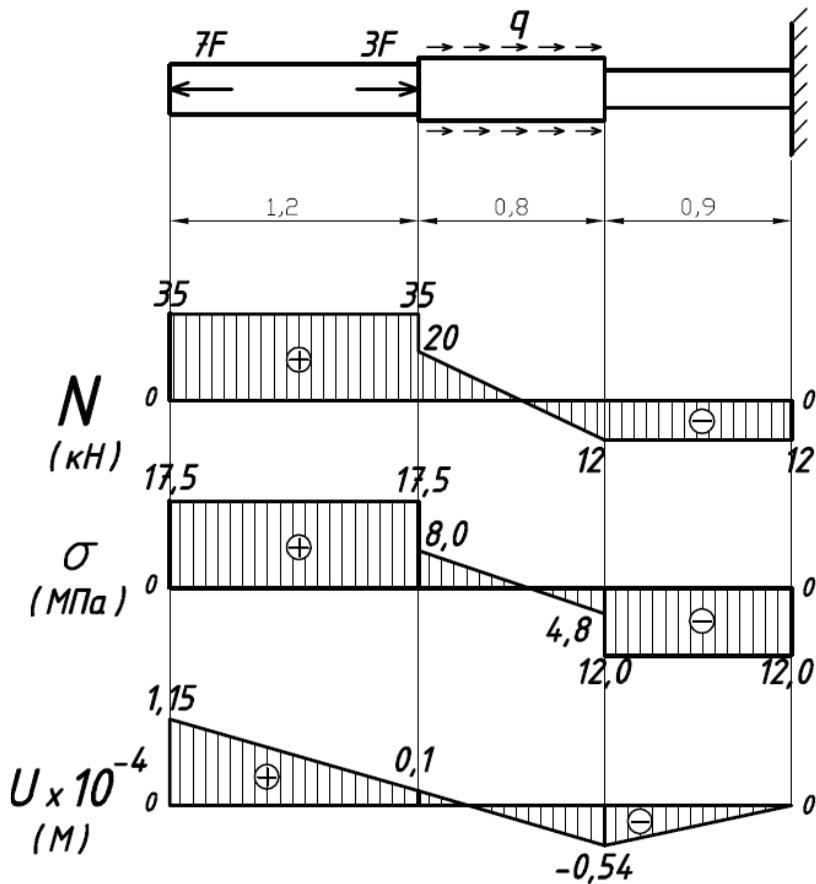


Рисунок 2.4

## Задача 2.2

**Условие задачи.** Стержень ступенчатого сечения (рисунок 2.5), выполненный из разнородных материалов (сталь и латунь), нагружен сосредоточенной силой  $F=30 \text{ кН}$  и нагрет на температуру  $\Delta t = 35^\circ \text{C}$ . С левой стороны стержень жестко закреплен, а справа до неподатливой опоры имеет зазор  $\Delta = 0,5 \text{ мм}$ .

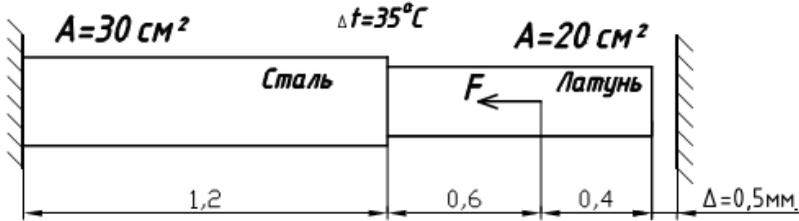


Рисунок 2.5

**Требуется:** построить эпюры продольных сил  $N_z$ , эпюры напряжений  $\sigma$  и эпюру осевых перемещений  $u$ .

**Решение.** Данный брус относится к так называемым конструктивно нелинейным системам, которые в процессе нагружения могут менять свою расчетную схему. В данной задаче стержень под действием внешней силы  $F$  должен укоротиться на величину  $\Delta l_F$ , а под действием температурного нагрева  $\Delta t$  должен удлиниться на величину  $\Delta l_{\Delta t}$ . При этом если величина возможного удлинения стержня окажется больше зазора  $\Delta$ , то его правый конец упрется в опору  $B$ , и стержень будет работать как статически неопределимый. Для проверки этого условия вычислим деформации всех трех участков стержня от действия силы  $F$  ( $N_z$ ) и температурного нагрева  $\Delta t$  по формулам:

$$\Delta l_F = \frac{N_z \cdot l}{E \cdot A}; \quad \Delta l_{\Delta t} = \alpha \cdot l \cdot \Delta t,$$

где  $N_z$  – продольная сила на каждом участке;

$l$  – длина участка;

$E$  – модуль Юнга;

$A$  – площадь сечения;

$\alpha$  – коэффициент температурного расширения;

$\Delta t$  – изменение температуры.

Под действием силы  $F$  на первом и втором участках возникает продольная сила  $N_z$ , вызывающая сжатие этих участков, а на третьем участке – продольная сила  $N_z=0$ .

**Деформации участков от продольной силы:**

$$\Delta l_F^I = \frac{-30 \cdot 10^3 (H) \cdot 1,2 (м)}{2 \cdot 10^{11} \left( \frac{H}{м^2} \right) \cdot 30 \cdot 10^{-4} (м^2)} = \frac{-36 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^7} = -0,6 \cdot 10^{-4} (м).$$

$$\Delta l_F^{II} = \frac{-30 \cdot 10^3 (H) \cdot 0,6 (м)}{1 \cdot 10^{11} \left( \frac{H}{м^2} \right) \cdot 20 \cdot 10^{-4} (м^2)} = \frac{-18 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^7} = -0,9 \cdot 10^{-4} (м).$$

$$\Delta l_F^{III} = 0 (м).$$

**Деформации участков от температурного нагрева:**

$$\Delta l_{\Delta t}^I = 125 \cdot 10^{-7} (1/град) \cdot 1,2 (м) \cdot 35 (град) = 5250 \cdot 10^{-7} = 5,25 \cdot 10^{-4} (м).$$

$$\Delta l_{\Delta t}^{II} = 190 \cdot 10^{-7} \cdot 0,6 \cdot 35 = 3990 \cdot 10^{-7} = 3,99 \cdot 10^{-4} (м).$$

$$\Delta l_{\Delta t}^{III} = 190 \cdot 10^{-7} \cdot 0,4 \cdot 35 = 2660 \cdot 10^{-7} = 2,66 \cdot 10^{-4} (м).$$

Сравнивая величину возможного удлинения стержня от действия силы  $F$  и температурного нагрева  $\Delta t$  с величиной зазора  $\Delta = 0,5 (мм) = 5 \cdot 10^{-4} (м)$ , видим, что стержень упрется в неподатливую опору  $B$ :

$$\Delta l_F + \Delta l_{\Delta t} = (-0,6 - 0,9 + 0 + 5,25 + 3,99 + 2,66) \cdot 10^{-4} = 10,4 \cdot 10^{-4} (м) > \Delta.$$

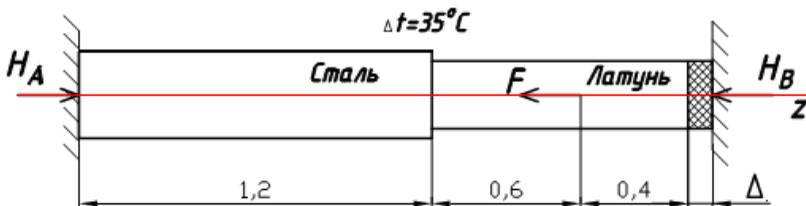


Рисунок 2.6

При этом в опорах  $A$  и  $B$  возникнут опорные реакции  $H_A$  и  $H_B$ , которые нельзя определить с помощью единственного уравнения статики  $\sum F_z = 0$ , т. к. уравнение одно, а неизвестных в этом уравнении две:

$$\sum F_z = 0; \quad H_A - F - H_B = 0.$$

Отбросим мысленно правую опору  $B$ , и влияние ее заменим действием неизвестной силы  $X$ , равной реакции  $H_B$ .

Образованная таким образом основная система (рисунок 2.7) должна деформироваться как заданная, т. е. ее удлинение от действия силы  $F$ , от температурного нагрева  $\Delta t$  и от действия неизвестной силы  $X$  должно быть равно зазору  $\Delta$ . Это условие, вытекающее из рассмотрения характера деформации стержня, является дополнительным и позволит раскрыть статическую неопределенность задачи.

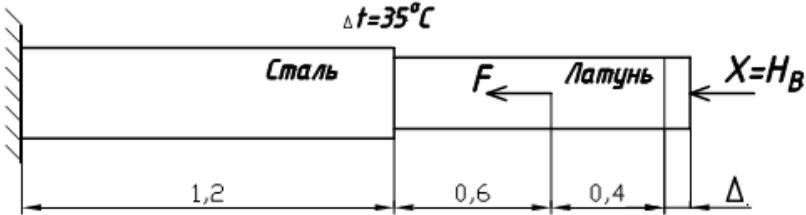


Рисунок 2.7

Дополнительное уравнение:

$$\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_{\Delta t} + \Delta l_X = \Delta.$$

Вычислим укорочение стержня от действия силы  $X$ .

$$\Delta l_x = \frac{-X \cdot 1,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 30 \cdot 10^{-4}} + \frac{-X \cdot 0,6}{1 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} + \frac{-X \cdot 0,4}{1 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}}.$$

$$\Delta l_x = -X(0,02 + 0,03 + 0,02) = -X \cdot 0,07.$$

Подставим все найденные деформации в дополнительное уравнение.

$$\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_{\Delta t} + \Delta l_X = -1,5 \cdot 10^{-4} + 11,9 \cdot 10^{-4} - X \cdot 0,07 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{-4} (\text{м}).$$

$$10,4 \cdot 10^{-4} - X \cdot 0,07 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{-4} (\text{м}).$$

$$X = \frac{10,4 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-4}}{0,07 \cdot 10^{-7}} = \frac{5,4 \cdot 10^{-4}}{0,07 \cdot 10^{-7}} = 77,14 \cdot 10^3 (\text{Н}) = 77,14 (\text{кН}) = H_B.$$

Статическая неопределенность задачи раскрыта. Опорную реакцию  $H_A$  определим из уравнения статики.

$$H_A = H_B + F = 77,14 + 30 = 107,14 (\text{кН}).$$

Для построения эпюр продольных сил, нормальных напряжений и осевых перемещений рассчитываем основную систему от действия продольной силы  $N_z$  на каждом участке и нагрева  $\Delta t$ .

**Определим продольную силу на каждом участке**, составив уравнения равновесия  $\sum F_z = 0$ .

**На первом участке**  $N_z = -H_A = -107,14$  (кН),

**На втором участке**  $N_z = -H_A = -107,14$  (кН),

**На третьем участке**  $N_z = -H_A + F = -107,14 + 30 = 77,14$  (кН).

По полученным данным строим эпюру  $N_z$  (рисунок 2.8).

**Определим нормальное напряжение  $\sigma$**  на каждом участке по формуле  $\sigma = \frac{N_z}{A}$ .

**На первом участке**

$$\sigma^I = \frac{N_z^I}{A} = \frac{-107,14 \cdot 10^3 \text{ (Н)}}{30 \cdot 10^{-4} \text{ (м}^2\text{)}} = 3,57 \cdot 10^7 = 35,7 \cdot 10^6 \text{ (Па)} = 35,7 \text{ (МПа)}.$$

**На втором участке**

$$\sigma^{II} = \frac{N_z^{II}}{A} = \frac{-107,14 \cdot 10^3 \text{ (Н)}}{20 \cdot 10^{-4} \text{ (м}^2\text{)}} = 5,36 \cdot 10^7 = 53,6 \cdot 10^6 \text{ (Па)} = 53,6 \text{ (МПа)}.$$

**На третьем участке**

$$\sigma^{III} = \frac{N_z^{III}}{A} = \frac{77,14 \cdot 10^3 \text{ (Н)}}{20 \cdot 10^{-4} \text{ (м}^2\text{)}} = 3,86 \cdot 10^7 = 38,6 \cdot 10^6 \text{ (Па)} = 38,6 \text{ (МПа)}.$$

По полученным данным строим эпюру  $\sigma$  (рисунок 2.8).

**Определим деформацию каждого участка** от продольной силы  $N_z$  и температурного нагрева  $\Delta t$

$$\Delta l = \frac{N_z \cdot l}{E \cdot A} + \alpha \cdot l \cdot \Delta t.$$

**На первом участке**

$$\Delta l^I = \frac{-107,14 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 30 \cdot 10^{-4}} + 125 \cdot 10^{-7} \cdot 1,2 \cdot 35 = -2,14 \cdot 10^{-4} + 5,25 \cdot 10^{-4} = 3,11 \cdot 10^{-4} \text{ (м)}.$$

**На втором участке**

$$\Delta l^{II} = \frac{-107,14 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{1 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} + 190 \cdot 10^{-7} \cdot 0,6 \cdot 35 = -3,21 \cdot 10^{-4} + 3,99 \cdot 10^{-4} = 0,78 \cdot 10^{-4} \text{ (м)}.$$

**На третьем участке**

$$\Delta l^{III} = \frac{-77,14 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{1 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} + 190 \cdot 10^{-7} \cdot 0,4 \cdot 35 = -1,54 \cdot 10^{-4} + 2,66 \cdot 10^{-4} = 1,12 \cdot 10^{-4} \text{ (м)}.$$

**Определим перемещения характерных сечений стержня относительно заделки.**

$$U_A = 0.$$

$$U_C = \Delta l^I = 3,11 \cdot 10^{-4} \text{ (м)}.$$

$$U_D = U_C + \Delta l^{II} = 3,11 \cdot 10^{-4} + 0,78 \cdot 10^{-4} = 3,89 \cdot 10^{-4} \text{ (м)}.$$

$$U_B = U_D + \Delta l^{III} = 3,89 \cdot 10^{-4} + 1,12 \cdot 10^{-4} = 5,01 \cdot 10^{-4} \text{ (м)} \approx \Delta.$$

По полученным данным строим эпюры перемещений  $U$  характерных сечений бруса (рисунок 2.8).

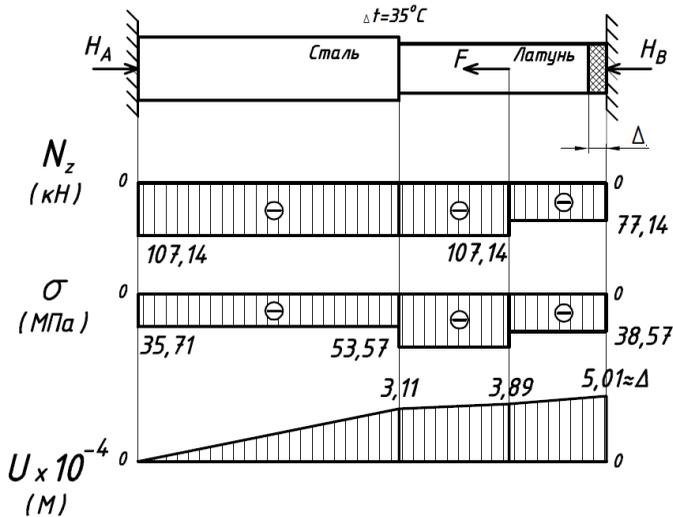


Рисунок 2.8

### Задача 2.3

**Условие задачи.** Абсолютно жесткий брус, нагруженный силой  $F$ , опирается на шарнирно-неподвижную опору и шарнирно поддерживается двумя наклоненными стержнями 1 и 2 (рисунок 2.9). Площадь сечения первого стержня  $A_1=20 \text{ см}^2$ , а площадь второго стержня  $A_2=25 \text{ см}^2$ .

**Требуется.** Для заданной статически неопределимой стержневой системы определить допустимую величину силы  $F$  по методу допускаемых напряжений.

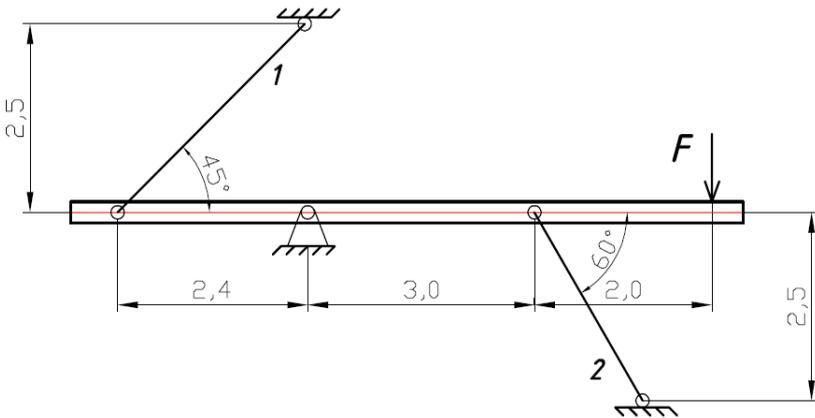


Рисунок 2.9

**Решение.** Из условия прочности по допускаемым напряжениям на растяжение (сжатие)  $\sigma = \frac{N_z}{A} \leq [\sigma]$  следует, что усилия в стержнях 1 и 2 не должны превышать допускаемых усилий:

$$N_1 \leq [N_1] = [\sigma] \cdot A_1, \quad [N_1] = 160 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-4} = 3200 \cdot 10^2 = 320 \text{ (кН)}.$$

$$N_2 \leq [N_2] = [\sigma] \cdot A_2, \quad [N_2] = 160 \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 4000 \cdot 10^2 = 400 \text{ (кН)}.$$

#### 1. Статическая сторона задачи

Рассматривая равновесие абсолютно жесткого стержня (рисунок 2.10) под действием силы  $F$  и внутренних усилий  $N_1$  и  $N_2$ , возникающих в стержнях 1 и 2, составим единственное уравнение равнове-

сия  $\sum M_A = 0$ . Два других возможных уравнения будут содержать неизвестные опорные реакции  $R_A$  и  $H_A$ , которые не требуются для решения задачи.

$$\sum M_A = 0 \quad N_1 \cdot 2,4 \cdot \cos 45 + N_2 \cdot 3 \cdot \cos 30 - F \cdot 5 = 0,$$

$$N_1 \cdot 2,4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - F \cdot 5 = 0,$$

$$N_1 \cdot 1,697 + N_2 \cdot 2,598 - F \cdot 5 = 0.$$

$$\boxed{F = N_1 \cdot 0,34 + N_2 \cdot 0,52} \quad (1)$$

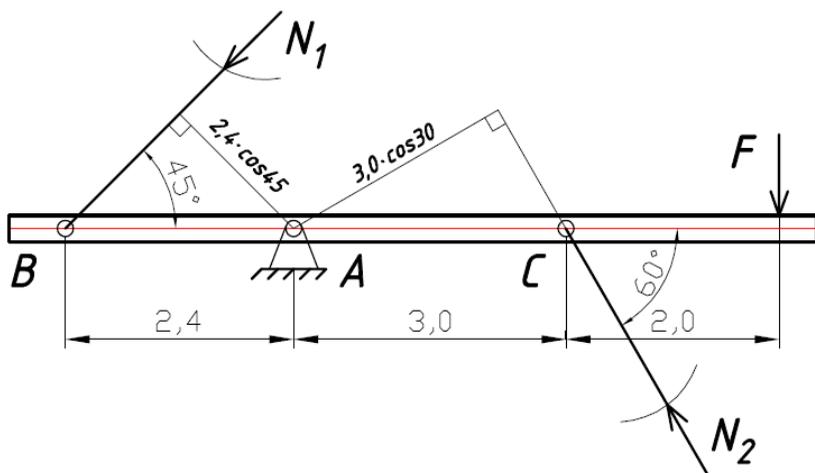


Рисунок 2.10

## 2. Геометрическая сторона задачи

Так установить зависимость между усилиями  $N_1$  и  $N_2$  не удастся из уравнений статики, то необходимо рассмотреть зависимость между деформациями стержней 1 и 2. Под действием силы  $F$  жесткий брус повернется на бесконечно малый угол, при этом стержни 1 и 2 деформируются от усилий  $N_1$  и  $N_2$ .

Построим план перемещений.

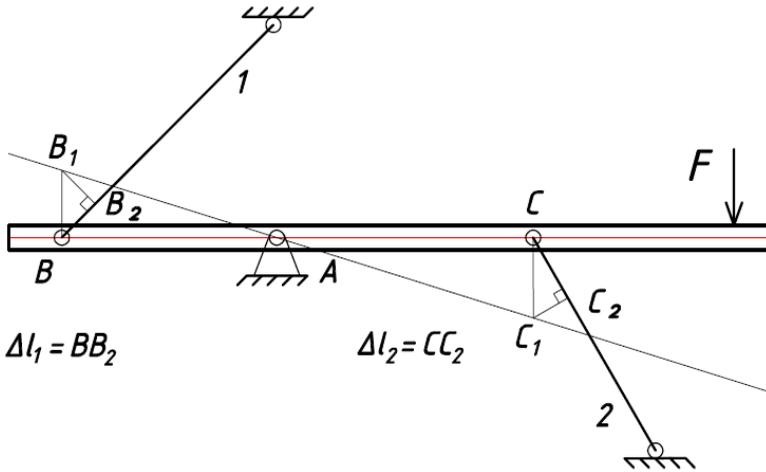


Рисунок 2.11

Жесткий брус повернем на некоторый угол, при этом узел  $B$  займет положение  $B_1$ , а узел  $C$  займет положение  $C_1$ , так как должно быть выполнено условие неразрушимости конструкции (рисунок 2.11). Чтобы показать деформацию первого стержня  $\Delta l_1$ , надо провести перпендикуляр из точки  $B_1$  к линии первого стержня (получили точку  $B_2$ ). Отрезок  $BB_2$  и будет  $\Delta l_1$ . Чтобы показать деформацию второго стержня  $\Delta l_2$ , надо провести перпендикуляр из точки  $C_1$  к линии второго стержня (получили точку  $C_2$ ). Отрезок  $CC_2$  и будет  $\Delta l_2$ . Из подобия треугольников  $ABB_1$  и  $ACC_1$  следует, что

$$\frac{BB_1}{BA} = \frac{CC_1}{CA}.$$

$$BB_1 = \Delta l_1 / \cos 45, \quad CC_1 = \Delta l_2 / \cos 30, \quad BA = 2,4 \text{ (м)}, \quad CA = 3,0 \text{ (м)},$$

$$\frac{\Delta l_1 / \cos 45}{2,4} = \frac{\Delta l_2 / \cos 30}{3,0};$$

$$\frac{\Delta l_1 \cdot 2}{2,4 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\Delta l_2 \cdot 2}{3,0 \cdot \sqrt{3}}; \quad \Delta l_1 = \frac{\Delta l_2 \cdot 2}{3,0 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{2,4 \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Получим дополнительное уравнение, которое позволит раскрыть статическую неопределенность.

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot 0,65. \quad (2)$$

### 3. Физическая сторона задачи

Раскроем дополнительное уравнение, используя закон Гука:

$$\Delta l = \frac{N_z \cdot l}{E \cdot A}.$$

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} \cdot 0,65; \quad (3)$$

$$l_1 = \frac{2,5}{\cos 45} = \frac{2,5 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 3,54 \text{ (м)}; \quad l_2 = \frac{2,5}{\cos 30} = \frac{2,5 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2,89 \text{ (м)}.$$

Подставим все известные значения в выражение (3).

$$\frac{N_1 \cdot 3,54}{2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = \frac{N_2 \cdot 2,89}{2 \cdot 10^{11} \cdot 25 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,65,$$

$$N_1 = N_2 \cdot 0,425. \quad (4)$$

Допускаемые значения усилий в стержнях, найденные ранее из условия прочности, имеют значения:

$$[N_1] = 320 \text{ (кН)}, \quad [N_2] = 400 \text{ (кН)}.$$

Если принять, что  $N_1 = [N_1] = 320 \text{ (кН)}$ , то из уравнения (4) следует, что

$$N_2 = \frac{[N_1]}{0,425} = \frac{320}{0,425} = 752,9 \text{ (кН)} > [N_2] = 400 \text{ (кН)}.$$

Это противоречит условию прочности.

Тогда принимаем  $N_2 = [N_2] = 400 \text{ (кН)}$ . Из уравнения (4) следует, что

$$N_1 = [N_2] \cdot 0,425 = 400 \cdot 0,425 = 170 \text{ (кН)} < [N_2] = 320 \text{ (кН)} .$$

Это удовлетворяет условию прочности.

Принимаем, что усилие  $N_1=170$  (кН), а усилие  $N_2=400$  (кН).

#### **4. Синтез**

Подставив в уравнение (1) принятые значения для усилий в первом и втором стержнях, найдем допустимое значение нагрузки:

$$[F] = N_1 \cdot 0,34 + N_2 \cdot 0,52 = 170 \cdot 0,34 + 400 \cdot 0,52 = 265,8 \text{ (кН)} .$$

### Глава 3. Расчеты на прочность при изгибе

*Плоский изгиб* – изгиб, при котором все усилия, действующие на конструкцию, лежат в одной из главных плоскостей.

Подбор сечения при плоском изгибе производят для опасного сечения конструкции. Сечение, в котором изгибающий момент имеет максимальное значение, является *опасным*.

Для определения опасного сечения конструкции строят эпюры внутренних усилий (поперечных сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_x$ ), используя метод сечений. Оси X и Y – это главные центральные оси поперечного сечения конструкции.

Из условия прочности при изгибе, которое имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

определяют минимально допустимое значение момента сопротивления сечения относительно оси X (такой тип расчета называется проектным расчетом):

$$W_x \geq [W_x] = \frac{M_x^{\max}}{[\sigma]}.$$

$[W_x]$  – это допускаемый момент сопротивления сечения относительно оси X.

Далее требуется составить выражение для определения момента сопротивления сечения относительно оси X, используя геометрические параметры сечения:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}},$$

где  $I_x$  – осевой момент инерции сечения относительно оси X;

$y_{\max}$  – расстояние от оси X до наиболее удаленных точек сечения.

Записывают выражение для определения  $I_x$  по следующему плану:

1. Разбиваем сложное сечение на простейшие составляющие;
2. Определяем центр тяжести сечения, через который проводим главную центральную ось сечения X;
3. Записываем выражение для определения осевого момента инерции  $I_x$  сложного сечения, который равен сумме осевых моментов инерции простейших составляющих сложного сечения относительно оси X:

$$I_x = I_x^I + I_x^{II} + \dots + I_x^n = \sum_{i=1}^n I_x^i.$$

Осевой момент инерции простейшей составляющей сложного сечения относительно оси X определяем, используя правило параллельного переноса осей.

Например: 
$$I_x^I = I_{x_1}^I + a_1^2 A^I,$$

где  $I_x^I$  – осевой момент инерции первой простейшей составляющей сложного сечения относительно оси X,

$I_{x_1}^I$  – осевой момент инерции простейшей составляющей сечения относительно собственной центральной оси  $X_1$ , которая параллельна оси X,

$a_1$  – расстояние между осью X и осью  $X_1$ ,

$A^I$  – площадь сечения первой простейшей составляющей сложного сечения.

Аналогично определяем осевые моменты инерции всех остальных простейших составляющих сложного сечения относительно оси X и затем все складываем.

Записываем выражение для определения момента сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}.$$

Далее методом попыток, подставляя необходимые геометрические параметры сечения из таблицы сортамента прокатной стали, вычисляем  $W_x$  и сравниваем его с  $[W_x]$ , полученным из условия прочности. Должно выполняться условие  $W_x \geq [W_x]$ .

Перебором нескольких вариантов прокатного профиля из таблицы сортамента добиваемся, чтобы момент сопротивления сечения  $W_x$  был в целях экономии материалов максимально приближен к  $[W_x]$ .

Допускается, чтобы  $W_x$  был меньше  $[W_x]$ , но не более чем на 5 %.

**В Приложении Б** представлены варианты заданий для самостоятельного решения задач по рассматриваемой теме.

### Задача 3.1

Необходимо подобрать поперечные сечения указанного типа для стальной балки (рисунок 3.1) по методу допускаемых напряжений.

Дано:  $M=qa^2=60$  кНм,  $F=qa=30$  кН,  $q=15$  кН/м,  $a=2$  м,  $[\sigma]=160$  МПа.

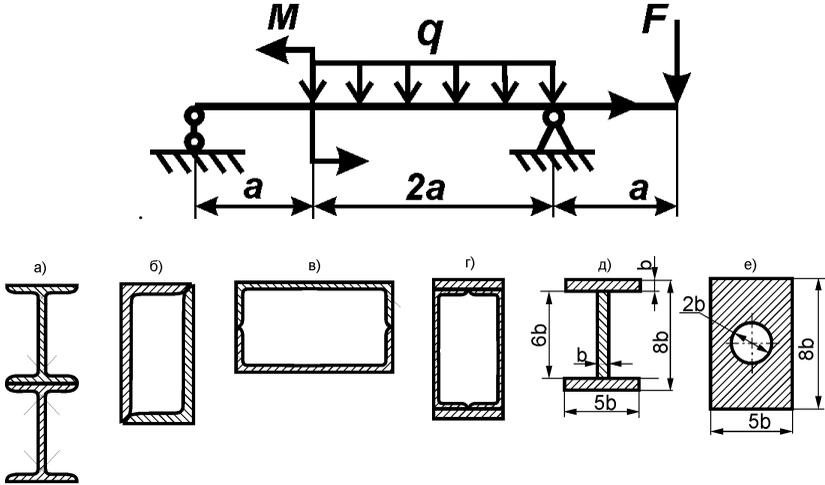


Рисунок 3.1

Перед построением эпюр определим опорные реакции (если это необходимо).

$$\sum M_A = M - q2a \cdot 2a + R_B 3a - F \cdot 4a = 0 \quad R_B = \frac{7}{3} qa = 70 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = -R_A \cdot 3a + M + q2a \cdot a - F \cdot a = 0 \quad R_A = \frac{2}{3} qa = 20 \text{ кН.}$$

$$\sum F_z = H_B = 0 \quad H_B = 0.$$

После определения опорных реакций делается проверка. Для этого составляется уравнение  $\sum F_y = 0$ .

$$R_A + R_B - F - q2a = \frac{2}{3} qa + \frac{7}{3} qa - qa - q2a = 0.$$

Так как тождество выполняется, то опорные реакции определены верно.

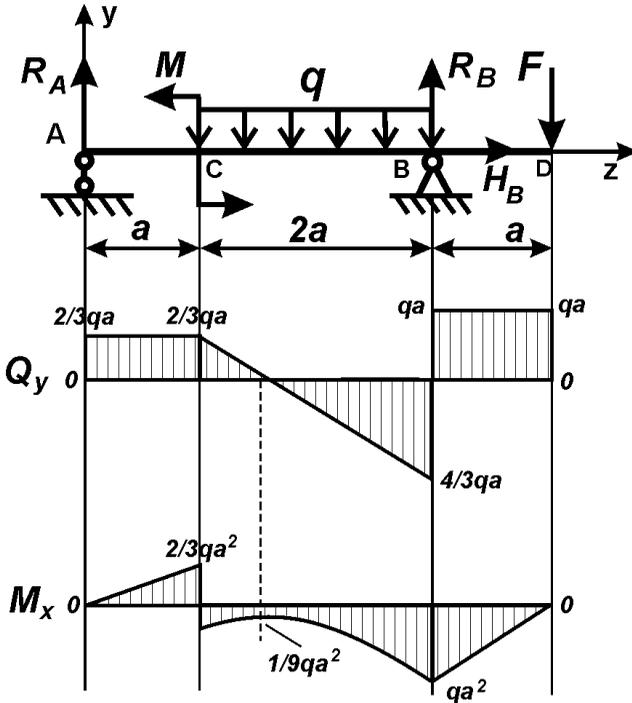


Рисунок 3.2

Из условия прочности по допускаемым напряжениям следует:

$$W_x \geq [W_x] = \frac{M_x^{\max}}{[\sigma]} =$$

$$\frac{60 \cdot 10^3 \text{ H} \cdot \text{м}}{160 \cdot 10^6 \text{ H} / \text{м}^2} = 0,375 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 375 \text{ см}^3.$$

В нашем примере опасным сечением конструкции является сечение «В», в котором изгибающий момент и поперечная сила имеют максимальные значения (рисунок 3.2).

$$M_x^{\max} = qa^2 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$Q_y^{\max} = \frac{4}{3} qa = 40 \text{ кН}.$$

**а)** Сделаем подбор сечения балки, которое состоит из двух двутавров (рисунок 3.3).

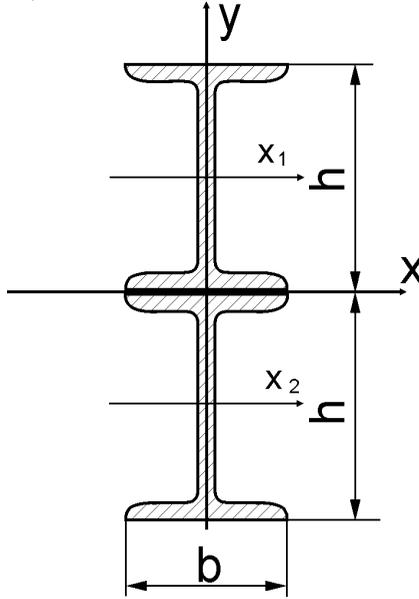


Рисунок 3.3

Определим момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}},$$

где  $I_x$  — осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси X;

$y_{\max}$  — расстояние от оси X до наиболее удаленных точек сечения.

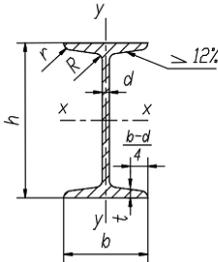
$$I_x = 2 \left[ I_{x_1} + \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot A \right].$$

После определения осевого момента инерции запишем выражение для момента сопротивления сечения, вычислим его и сравним с минимально допустимым значением момента сопротивления, которое определили из условия прочности:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{2 \left[ I_{x_1} + \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot A \right]}{h} \geq [W_z] = 375 \text{ см}^3.$$

При подборе сечения применяем метод попыток, подставляя в выражение  $W_x$  необходимые геометрические параметры сечения из таблицы сортамента.

#### СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ



Балки двутавровые (по ГОСТ 8239 – 72)

Обозначения:

$h$  – высота балки,  
 $b$  – ширина полки,  
 $d$  – толщина стенки,  
 $t$  – средняя толщина полки,

$J$  – момент инерции,  
 $W$  – момент сопротивления,  
 $i$  – радиус инерции,  
 $S$  – статический момент полусечения.

Таблица П.1

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения $A$ , см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	Масса 1 м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9

Рисунок 3.4

Выбираем двутавр № 18 ( $I_x=1290 \text{ см}^4$ ,  $h=18 \text{ см}$ ,  $A=23,4 \text{ см}^2$ ).

$$W_x = \frac{2 \left[ 1290 + \left( \frac{18}{2} \right)^2 \cdot 23,4 \right]}{18} = 353,93 < 375 \text{ см}^3.$$

Двутавр № 18 условию прочности не удовлетворяет.

**Выбираем двутавр № 18а ( $I_x=1430 \text{ см}^4$ ,  $h=18 \text{ см}$ ,  $A=25,4 \text{ см}^2$ ).**

$$W_x = \frac{2 \left[ 1430 + \left( \frac{18}{2} \right)^2 \cdot 25,4 \right]}{18} = 387,5 > 375 \text{ см}^3.$$

Двутавр № 18а условию прочности удовлетворяет.

В некоторых случаях необходимо проверить прочность балки по главным напряжениям. Такую проверку целесообразно проводить при выполнении следующих условий:

1. Изгибающий момент и поперечная сила достигают максимальных значений (или близких к максимальным) в одном и том же сечении;
2. Ширина балки резко меняется вблизи границ сечения.

Фактические максимальные напряжения составят

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} = \frac{60 \cdot 10^3}{387,5 \cdot 10^{-6}} = 154,8 \cdot 10^6 \text{ Н / м}^2 = 154,8 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений  $\sigma$  и касательных напряжений  $\tau$  представлена на рисунке 3.5.

Касательные напряжения вычисляем по формуле Журавского в некоторых характерных точках сечения:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_X^{\text{omc}}}{I_x \cdot B}.$$

Для нашего сечения  $I_x=6974,8 \text{ см}^4$ ,  $Q_y=40 \text{ кН}$ ,  $B$  – ширина сечения в точке, где определяется касательное напряжение,  $S_X^{\text{omc}}$  – статический момент отсеченной части сечения относительно главной центральной оси  $X$ , который определяется по формуле

$$S_X^{\text{omc}} = A^{\text{omc}} \cdot y^{\text{omc}},$$

где  $A^{omc}$  – площадь отсеченной части,  $y^{omc}$  – координата центра тяжести отсеченной площади сечения относительно главной центральной оси  $X$  сечения.

**В точках 1, 7** касательные напряжения равны нулю, т. к.  $S^{omc}=0$ .

**В точках 2, 8 :**

$$\tau_{2,8} = \frac{Q_y \cdot b \cdot t \left( h - \frac{t}{2} \right)}{I_x \cdot B} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,10 \cdot 0,0083 \left( 0,18 - \frac{0,0083}{2} \right)}{6974,8 \cdot 10^{-8} \cdot 0,10} =$$

$$= 0,84 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,84 \text{ МПа}$$

Здесь, из таблицы сортамента, ширина сечения  $B = b = 100 \text{ мм} = 0,10 \text{ м}$ .

**В точках 3, 9:**

$$\tau_{3,9} = \frac{Q_y \cdot b \cdot t \left( h - \frac{t}{2} \right)}{I_x \cdot B} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,10 \cdot 0,0083 \left( 0,18 - \frac{0,0083}{2} \right)}{6974,8 \cdot 10^{-8} \cdot 0,0051} =$$

$$= 16,41 \cdot 10^6 \text{ Па} = 16,41 \text{ МПа}.$$

Здесь ширина сечения  $B = d = 5,1 \text{ мм} = 0,0051 \text{ м}$ .

**В точках 4, 10:**

$$\tau_{4,10} = \frac{Q_y}{I_x \cdot B} \cdot \left[ b \cdot t \left( h - \frac{t}{2} \right) + d \cdot (h - 2t) \cdot \frac{h}{2} \right] = \frac{40 \cdot 10^3}{6974,8 \cdot 10^{-8} \cdot 0,0051} \cdot x$$

$$x \left[ 0,10 \cdot 0,0083 \left( 0,18 - \frac{0,0083}{2} \right) + 0,0051 (0,18 - 2 \cdot 0,0083) \frac{0,18}{2} \right] =$$

$$= 24,84 \cdot 10^6 \text{ Па} = 24,84 \text{ МПа}.$$

Здесь ширина сечения  $B = d = 5,1 \text{ мм} = 0,0051 \text{ м}$ .

**В точках 5, 11:**

$$\tau_{5,11} = \frac{Q_y}{I_x \cdot B} \cdot \left[ b \cdot t \left( h - \frac{t}{2} \right) + d \cdot (h - 2t) \cdot \frac{h}{2} \right] = \frac{40 \cdot 10^3}{6974,8 \cdot 10^{-8} \cdot 0,1} x$$

$$x \left[ 0,10 \cdot 0,0083 \left( 0,18 - \frac{0,0083}{2} \right) + 0,0051 (0,18 - 2 \cdot 0,0083) \frac{0,18}{2} \right] =$$

$$= 1,27 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,27 \text{ МПа}.$$

Здесь ширина сечения  $B = b = 100 \text{ мм} = 0,1 \text{ м}$ .

**В точке 6:**

$$\tau_6 = \frac{Q_y}{I_x \cdot B} \cdot \left[ A \cdot \frac{h}{2} \right] = \frac{40 \cdot 10^3}{6974,8 \cdot 10^{-8} \cdot 0,0051} x \left[ 25,4 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{0,18}{2} \right] =$$

$$= 1,31 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,31 \text{ МПа}.$$

Здесь ширина сечения  $B = d = 5,1 \text{ мм} = 0,0051 \text{ м}$ ,  $A$  – площадь сечения.

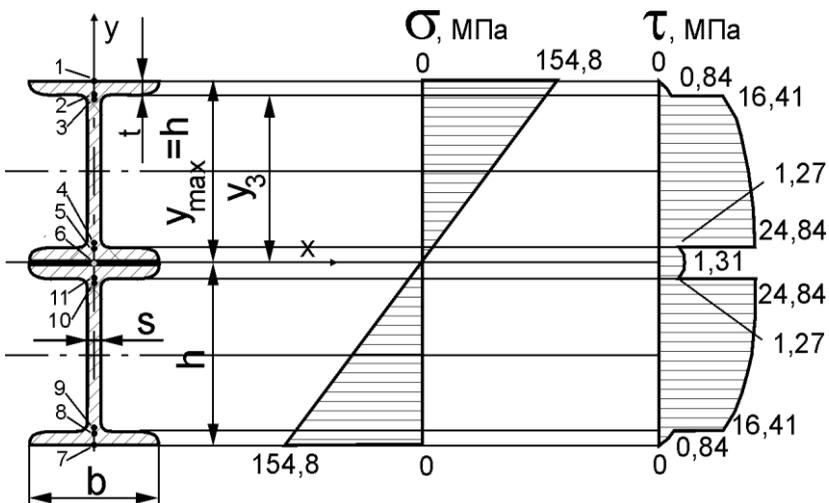


Рисунок 3.5

По третьей теории прочности (гипотезе наибольших касательных напряжений) для точки 3 определим эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_3^2 + 4\tau_3^2} = \sqrt{147,66^2 + 4 \cdot 16,41^2} = 151,26 \text{ МПа},$$

где 
$$\sigma_3 = \frac{\sigma_{\text{max}} \cdot y_3}{y_{\text{max}}} = \frac{\sigma_{\text{max}} \cdot (h-t)}{h} = 147,66 \text{ МПа}.$$

Прочность балки обеспечена. Двутавр № 18а условию прочности удовлетворяет.

**б)** Сечение балки состоит из двух неравнобоких уголков (рисунок 3.6).

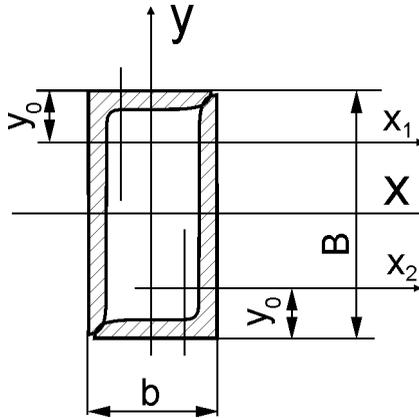


Рисунок 3.6

Определим момент инерции сечения  $I_x$  относительно центральной оси X, используя правило параллельного переноса осей, и момент сопротивления сечения  $W_x$ :

$$I_x = 2 \left[ I_{x_1} + \left( \frac{B}{2} - y_0 \right)^2 \cdot A \right],$$

$$W_x = \frac{2 \left[ I_{x_1} + \left( \frac{B}{2} - y_0 \right)^2 \cdot A \right]}{\frac{B}{2}}.$$

**Выбираем уголок № 16/10/1,4**

( $I_x=897 \text{ см}^4$ ,  $B=16 \text{ см}$ ,  $A=34.7 \text{ см}^2$ ,  $y_0=5,4 \text{ см}$ ) (рисунок 3.7).

$$W_x = \frac{2 \left[ 897 \cdot 10^{-8} + \left( \frac{0,16}{2} - 0,054 \right)^2 \cdot 34,7 \cdot 10^{-4} \right]}{\frac{0,16}{2}} =$$

$$= 282,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 282,9 \text{ см}^3 \leq 375 \text{ см}^3.$$

Условие прочности не выполняется.

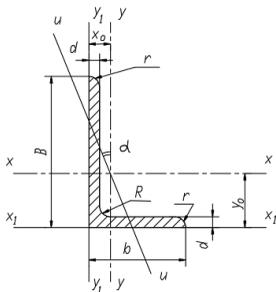
**Выбираем уголок № 20/12,5/1,1**

( $I_x=1449 \text{ см}^4$ ,  $B=20 \text{ см}$ ,  $A=34.9 \text{ см}^2$ ,  $y_0=6,5 \text{ см}$ ).

$$W_x = \frac{2 \left[ 1449 \cdot 10^{-8} + \left( \frac{0,20}{2} - 0,065 \right)^2 \cdot 34,9 \cdot 10^{-4} \right]}{\frac{0,20}{2}} =$$

$$= 375,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 375,3 \text{ см}^3 > 375 \text{ см}^3.$$

Уголок № 20/12,5/1,1 условию прочности удовлетворяет.



### Уголки неравнобокие (по ГОСТ 8510 – 72)

Обозначения:

- $B$  – ширина большей полки,
- $b$  – ширина меньшей полки,
- $d$  – толщина полки,
- $J$  – момент инерции,
- $i$  – радиус инерции,
- $x_0, y_0$  – расстояние от центра тяжести до наружных граней полки.

Таблица П 4

Номер профиля	Размеры, мм			Площадь сечения $A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_y, \text{см}^4$	$i_y, \text{см}$	$J_{H \min}, \text{см}^4$	$i_{H \min}, \text{см}$	Угол наклона осей $u, \text{tg } \alpha$	$J_{x_1}, \text{см}^4$	$J_{y_1}, \text{см}^4$	$x_0, \text{см}$	$y_0, \text{см}$	Масса 1 м, кг
	$B$	$b$	$d$													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
11/7	110	70	6,5	11,4	142	3,53	45,6	2,00	26,9	1,53	0,402	286	74,3	1,58	3,55	8,98
			7	12,3	152	3,52	48,7	1,99	28,8	1,53	0,402	309	80,3	1,60	3,57	9,64
			8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,400	353	92,3	1,64	3,61	10,9
12,5/8	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	452	119	1,80	4,01	11,0
			8	16,0	256	4,00	83,0	2,28	48,8	1,75	0,406	518	137	1,84	4,05	12,5
			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	649	173	1,92	4,14	15,5
			12	23,4	365	3,95	117	2,24	69,5	1,72	0,400	781	210	2,00	4,22	18,3
14/9	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	727	204	2,03	4,49	14,1
			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	911	245	2,12	4,58	17,5
			9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	1221	300	2,23	5,19	18,0
16/10	160	100	10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	1359	335	2,28	5,23	19,8
			12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	1634	405	2,36	5,32	23,6
			14	34,7	897	5,08	272	2,80	162	2,16	0,385	1910	477	2,43	5,40	27,3
			10	28,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,375	1933	444	2,44	5,88	22,2
18/11	180	110	12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	2324	537	2,52	5,97	26,4
			9	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	2920	718	2,79	6,50	27,4
			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	3189	786	2,83	6,54	29,7
			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,390	3726	922	2,91	6,62	34,4
20/12,5	200	125	16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	4264	1061	2,99	6,71	39,1
			11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	2920	718	2,79	6,50	27,4
			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	3189	786	2,83	6,54	29,7
			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,390	3726	922	2,91	6,62	34,4
25/16	250	160	12	48,3	3147	8,07	1032	4,62	604	3,54	0,410	6212	1634	3,53	7,97	37,9
			16	63,6	4091	8,02	1333	4,58	781	3,50	0,408	8308	2200	3,69	8,14	49,9
			18	71,1	4545	7,99	1475	4,56	896	3,49	0,407	9358	2487	3,77	8,23	55,8
			20	78,5	4987	7,97	1613	4,53	949	3,48	0,405	10410	2776	3,85	8,31	61,7

Рисунок 3.7

**В)** Сечение балки состоит из двух швеллеров (рисунок 3.8).

Определим момент инерции  $I_x$  сечения относительно центральной оси  $X$ , используя правило параллельного переноса осей, и момент сопротивления сечения  $W_x$ .

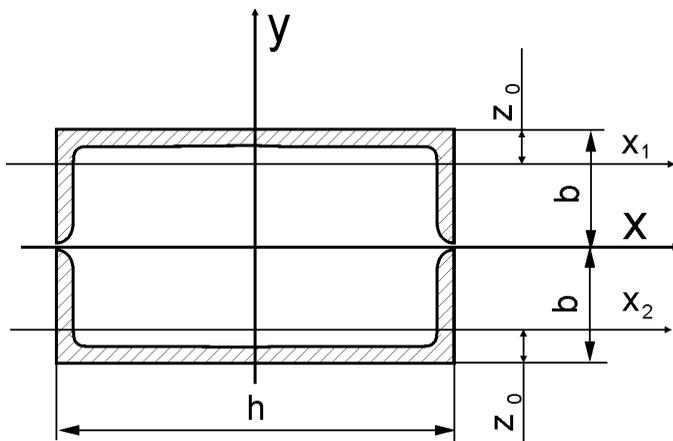


Рисунок 3.8

$$I_x = 2 \left[ I_{x_1} + (b - z_0)^2 \cdot A \right]$$

$$W_x = \frac{2 \left[ I_{x_1} + (b - z_0)^2 \cdot A \right]}{b}$$

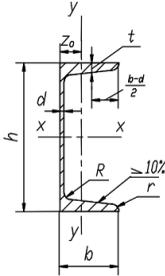
**Выбираем швеллер № 33**

( $I_y=410 \text{ см}^4$ ,  $b=10,5 \text{ см}$ ,  $A=34,9 \text{ см}^2$ ,  $z_0=2,59 \text{ см}$ ) (рисунок 3.9).

Здесь следует обратить внимание, что ось  $X_1$  на рисунке 3.8 является главной центральной осью одного швеллера, которая в таблице сортамента прокатной стали представляется осью  $Y$ , поэтому при выборе геометрических параметров сечения для расчетов берется осевой момент инерции относительно оси  $Y$ , т. е.  $I_y$ .

$$W_x = \frac{2 \left[ 410 \cdot 10^{-8} + (0,105 - 0,0259)^2 \cdot 34,9 \cdot 10^{-4} \right]}{0,105} = 494,02 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 494,02 \text{ см}^3.$$

Получили очень большой запас прочности.



**Швеллеры (по ГОСТ 8240 – 72)**

Обозначения:

- $h$  – высота швеллера,
- $b$  – ширина полки,
- $d$  – толщина стенки,
- $t$  – средняя толщина полки,
- $z_0$  – расстояние от оси  $y$  до наружной грани стенки,
- $J$  – момент инерции,
- $W$  – момент сопротивления,
- $i$  – радиус инерции,
- $S$  – статический момент полусечения.

Таблица П.2

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения $A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	$z_0, \text{см}$	Масса Г м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
14а	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80	14,2
16а	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	16,3
18а	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20а	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22а	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24а	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

Рисунок 3.9

**Выбираем швеллер № 24**

( $I_y=208 \text{ см}^4$ ,  $b=9 \text{ см}$ ,  $A=30,6 \text{ см}^2$ ,  $z_0=2,42 \text{ см}$ ).

$$W_x = \frac{2 \left[ 208 \cdot 10^{-8} + (0,09 - 0,0242)^2 \cdot 30,6 \cdot 10^{-4} \right]}{0,09} = 340,64 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 340,64 \text{ см}^3.$$

Условие прочности не выполняется.

**Выбираем швеллер № 24а**

( $I_y=254 \text{ см}^4$ ,  $b=9,5 \text{ см}$ ,  $A=32,9 \text{ см}^2$ ,  $z_0=2,67 \text{ см}$ ).

$$W_x = \frac{2 \left[ 254 \cdot 10^{-8} + (0,095 - 0,0267)^2 \cdot 32,9 \cdot 10^{-4} \right]}{0,095} = 383 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 =$$

$$= 383 \text{ см}^2 > 375 \text{ см}^2.$$

Швеллер № 24а условию прочности удовлетворяет.

Г) Сечение балки состоит из двух швеллеров № 14 ( $I_x = 491 \text{ см}^2$ ,  $b = 5,8 \text{ см}$ ,  $h = 14 \text{ см}$ ,  $t = 0,81 \text{ см}$ ) и двух пластин прямоугольного сечения, сверху и снизу жестко соединенных со швеллерами (рисунок 3.10). Требуется определить толщину пластин  $t$ .

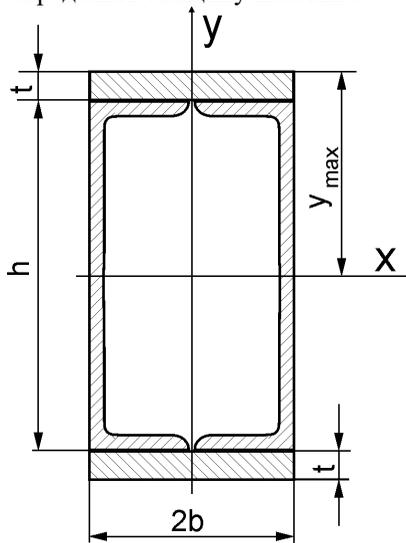


Рисунок 3.10

$$I_x = 2 \left[ I_x + \frac{2bt^3}{12} + 2bt \left( \frac{h}{2} + \frac{t}{2} \right)^2 \right],$$

$$W_x = \frac{2 \left[ I_x + \frac{2bt^3}{12} + 2bt \left( \frac{h}{2} + \frac{t}{2} \right)^2 \right]}{\frac{h}{2} + t}.$$

$$W_x = \frac{2 \left[ 491 \cdot 10^{-8} + \frac{2 \cdot 0,058 \cdot t^3}{12} + 2 \cdot 0,058 \cdot t \left( \frac{0,14}{2} + \frac{t}{2} \right)^2 \right]}{\frac{0,14}{2} + t} \geq 375 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

Откуда  $t = 0,07 \text{ м} = 7 \text{ см}$ .

Д) Сечение балки состоит из трех прямоугольных пластин (рисунок 3.11).

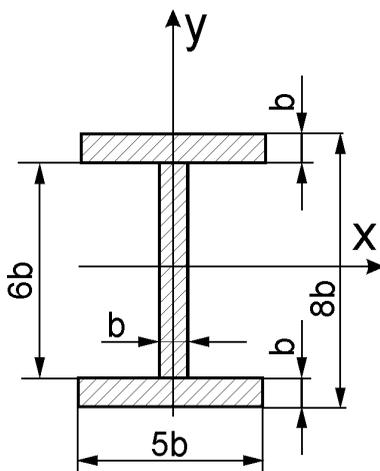


Рисунок 3.11

$$I_x = 2 \left[ \frac{5b \cdot b^3}{12} + 5b \cdot b \cdot \left( 3b + \frac{b}{2} \right)^2 \right] + \frac{b \cdot (6b)^3}{12},$$

$$W_x = \frac{I_x}{4b} = \frac{2 \left[ \frac{5b \cdot b^3}{12} + 5b \cdot b \left( 3b + \frac{b}{2} \right)^2 \right] + \frac{b \cdot (6b)^3}{12}}{4b} =$$

$$= 35,33b^3 \geq 375 \text{ см}^3.$$

Откуда  $b=2,2\text{см}$ .

**е)** Сечение балки представляет собой прямоугольник с вырезанным центральным отверстием (рисунок 3.12).

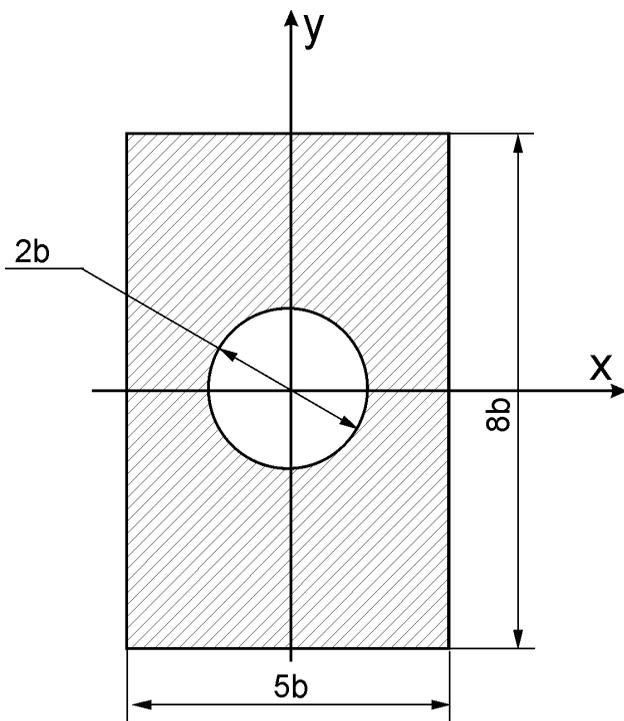


Рисунок 3.12

$$I_x = \frac{5b \cdot (8b)^3}{12} - \frac{\pi(2b)^4}{64},$$

$$W_x = \frac{\frac{5b \cdot (8b)^3}{12} - \frac{\pi(2b)^4}{64}}{4b} = 53,137b^3 \geq 375 \text{ см}^3.$$

Откуда  $b=1,92$  см.

### Задача 3.2

Для рамы (рисунок 3.13), которая изготовлена из хрупкого материала, необходимо подобрать размеры сечения (рисунок 3.14), если  $[\sigma]_p=40$  МПа,  $[\sigma]_c=120$  МПа,  $a=2$  м,  $q=7,5$  кН/м,  $F=qa=15$  кН,  $M=qa^2=30$  кНм.

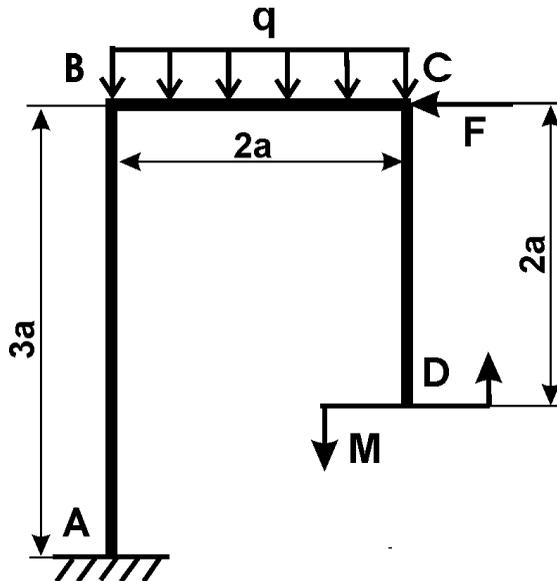


Рисунок 3.13

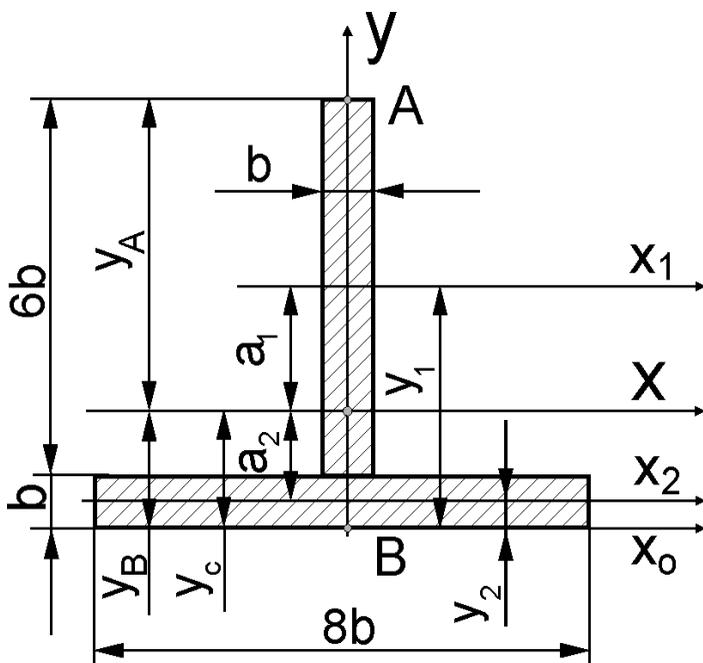


Рисунок 3.14

Для определения опасного сечения построим эпюры продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов, используя метод сечений (рисунок 3.15).

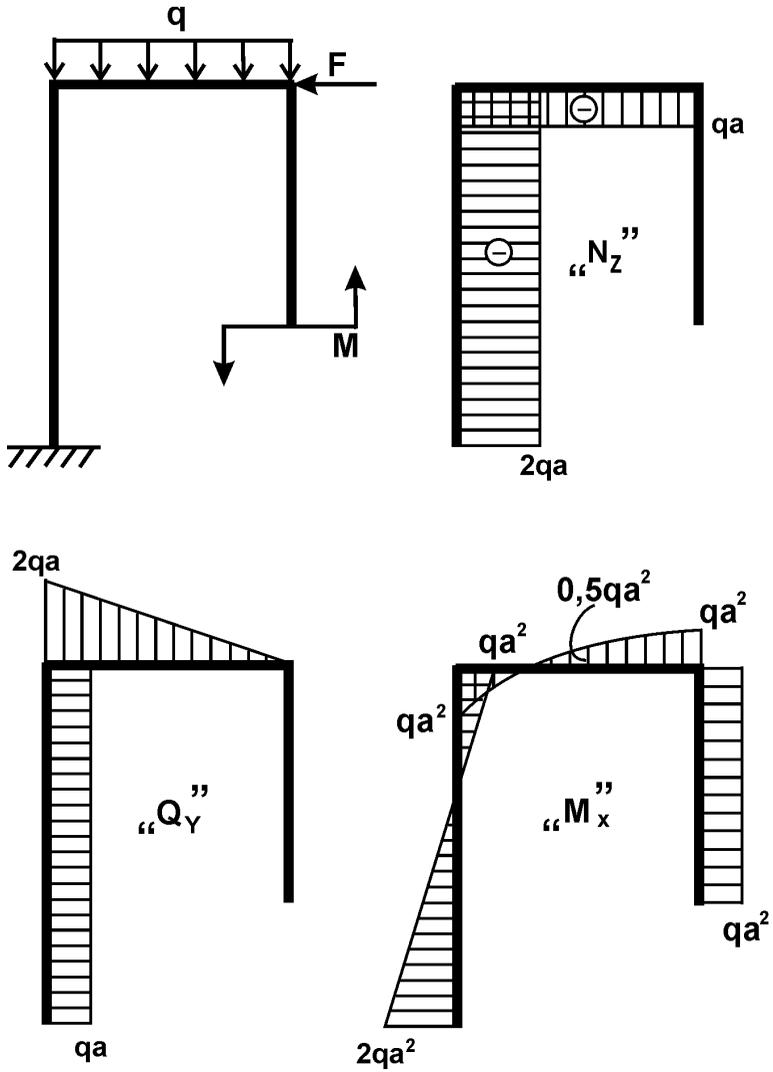


Рисунок 3.15

Опасным сечением рамы является сечение А, в котором:

$$M_x^{\max} = 2qa^2 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$Q_y^{\max} = qa = 15 \text{ кН}.$$

Определим положение центра тяжести сечения относительно оси  $X_0$ , проведенной по нижнему краю сечения, предварительно разбив его на составляющие – два прямоугольника площадью  $A_1$  и  $A_2$ . Сечение симметрично относительно оси  $Y$ , поэтому необходимо определить только координату  $Y_c$ .

$$y_c = \frac{S_{x_0}}{A} \text{ или } y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2},$$

где  $S_{x_0}$  – статический момент сечения относительно оси  $X_0$ ,

$$A_1 = 6b^2, \quad y_1 = 4b, \quad A_2 = 8b^2, \quad y_2 = 0,5b,$$

$$y_c = \frac{6b^2 \cdot 4b + 8b^2 \cdot 0,5b}{6b^2 + 8b^2} = 2b.$$

Определим момент инерции сечения относительно главной центральной оси  $X$ , используя формулу параллельного переноса осей:

$$I_x = I_{x_1} + A_1 a_1^2 + I_{x_2} + A_2 a_2^2.$$

$$I_{x_1} = \frac{b(6b)^3}{12} = 18b^4, \quad I_{x_2} = \frac{8b \cdot b^3}{12} = 0,667b^4,$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 2b,$$

$$a_2 = y_c - y_2 = 1,5b.$$

$$I_x = 18b^4 + 6b^2(2b)^2 + 0,667b^4 + 8b^2(1,5b)^2 = 60,667b^4.$$

Сечение по условию задачи должно быть расположено рационально, т. е. чтобы в растянутой зоне размещалась большая доля материала. Поэтому точку А сечения расположим в сжатой зоне, а точку В – в растянутой.

Для точки А условие прочности запишем в виде

$$\sigma_A = \frac{M}{I_x} y_A \leq [\sigma_{сж}], \text{ откуда } \frac{60 \cdot 10^3}{60,667b^4} 5b \leq 120 \cdot 10^6,$$

$$\frac{60,667b^4}{5b} \geq \frac{60 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6}, \quad b^3 \geq 41,21 \cdot 10^{-6},$$

$$b \geq \sqrt[3]{41,21 \cdot 10^{-6}} = 3,454 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx 3,5 \text{ см.}$$

Для точки В условие прочности запишем в виде

$$\sigma_B = \frac{M}{I_x} y_B \leq [\sigma_p], \quad \frac{60 \cdot 10^3}{60,667b^4} 2b \leq 40 \cdot 10^6,$$

$$\frac{60,667b^4}{2b} \geq \frac{60 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^6},$$

$$b^3 \geq 49,45 \cdot 10^{-6}, \quad b \geq \sqrt[3]{49,45 \cdot 10^{-6}} = 3,67 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx 3,7 \text{ см.}$$

Из двух найденных значений  $b$  принимаем наибольшее.

Определим значения касательных напряжений для характерных точек сечения 1, 2, 3, 4, 5, используя формулу Журавского:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{omc}}{I_x B}.$$

Здесь  $Q_y$  – поперечная сила в опасном сечении конструкции,

$S_x^{omc}$  – статический момент отсеченной части сечения относительно оси  $X$ ,

$I_x$  – осевой момент инерции сечения относительно главной центральной оси  $X$ .

$B$  – ширина сечения в точке, где определяем касательное напряжение. В точках 1, 5  $S_1^{omc} = S_5^{omc} = 0$ , следовательно:

**- В точках 1, 5:**

$$\tau_1 = \tau_5 = 0.$$

**- В точках 2, 3:**

$$\begin{aligned} S_2^{omc} = S_3^{omc} &= 8b \cdot b \cdot 1,5b = 12b^3 = 12 \cdot (3,7 \cdot 10^{-2})^3 = \\ &= 607,836 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3, \end{aligned}$$

**- В точке 4:**

$$S_4^{omc} = 5b \cdot b \cdot 2,5b = 10b^3 = 12,5 \cdot (3,7 \cdot 10^{-2})^3 = 633,16 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Определим касательные напряжения  $\tau$  в характерных точках.

**В точке 2:**

$$\tau_2 = \frac{Q_y S_2^{omc}}{I_x B} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 607,836 \cdot 10^{-6}}{60,667 \cdot (3,7 \cdot 10^{-2})^4 \cdot 3,7 \cdot 10^{-2}} = \frac{9117,54 \cdot 10^{-3}}{336551,2 \cdot 10^{-10}} = 0,27 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

**В точке 3:**

$$\tau_3 = \frac{Q_y S_3^{omc}}{I_x B} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 607,836 \cdot 10^{-6}}{60,667 \cdot (3,7 \cdot 10^{-2})^4 \cdot 3,7 \cdot 10^{-2}} = \frac{9117,54 \cdot 10^{-3}}{42068,9 \cdot 10^{-10}} = 2,167 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

**В точке 4:**

$$\tau_4 = \frac{Q_y S_4^{omc}}{I_x B} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 633,16 \cdot 10^{-6}}{60,667 \cdot (3,7 \cdot 10^{-2})^4 \cdot 3,7 \cdot 10^{-2}} = \frac{9497,4 \cdot 10^{-3}}{42068,9 \cdot 10^{-10}} = 2,258 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

На рисунке 3.16 представлены эпюры нормальных и касательных напряжений для заданного типа сечения.

Проверку прочности проводим для точки 3, для которой  $\sigma = 19,52 \text{ МПа}$ ,  $\tau = 2,17 \text{ МПа}$ .

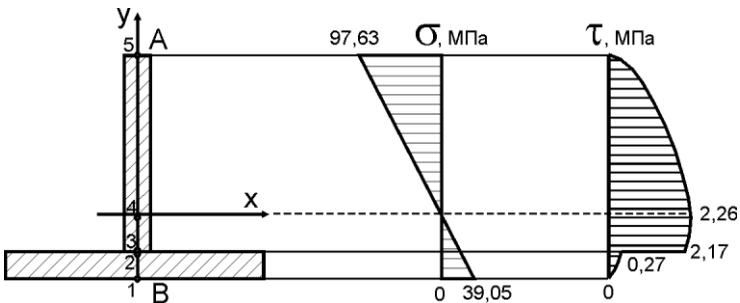


Рисунок 3.16

Для проверки используем **первую теорию прочности** (критерий наибольших нормальных напряжений):

$$\sigma_{\text{экв}}^I = \frac{1}{2} \left[ \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ 19,52 + \sqrt{19,52^2 + 4 \cdot 2,17^2} \right] = 19,76 \text{ МПа} \leq [\sigma_p].$$

Условие прочности выполняется. Окончательно принимаем  $b=3,7$  мм.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

ЗАДАНИЕ к главе 1:

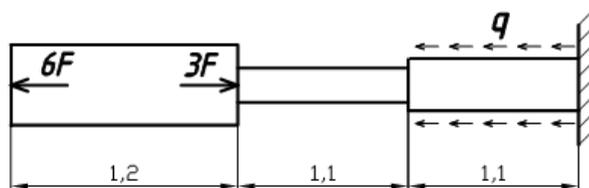
Определить внутренние усилия и построить их эпюры.

Таблица 1 – Варианты заданий

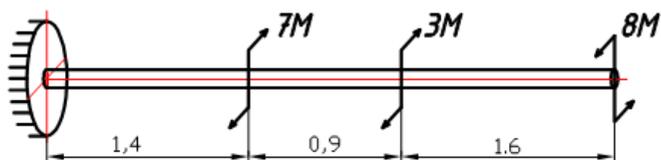
ЧИСЛОВЫЕ ДАННЫЕ								
№ Вар.	q, кН/м	F, кН	M, кНм		№ Вар.	q, кН/м	F, кН	M, кНм
<b>1</b>	10	20	35		<b>16</b>	20	25	30
<b>2</b>	20	25	40		<b>17</b>	10	30	25
<b>3</b>	10	30	25		<b>18</b>	20	15	30
<b>4</b>	20	35	30		<b>19</b>	10	40	25
<b>5</b>	10	40	25		<b>20</b>	20	25	40
<b>6</b>	20	15	30		<b>21</b>	10	25	30
<b>7</b>	10	25	30		<b>22</b>	20	35	40
<b>8</b>	20	30	25		<b>23</b>	10	35	20
<b>9</b>	10	35	20		<b>24</b>	20	15	30
<b>10</b>	20	15	30		<b>25</b>	10	20	25
<b>11</b>	10	20	25		<b>26</b>	20	25	40
<b>12</b>	20	25	30		<b>27</b>	10	30	35
<b>13</b>	10	30	35		<b>28</b>	20	35	40
<b>14</b>	20	35	40		<b>29</b>	10	40	25
<b>15</b>	10	40	25		<b>30</b>	20	25	30

### Вариант 1

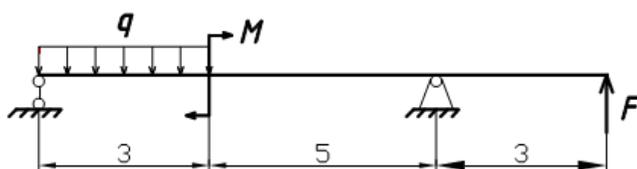
1



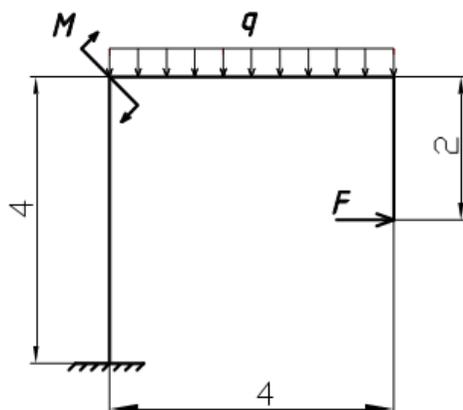
2



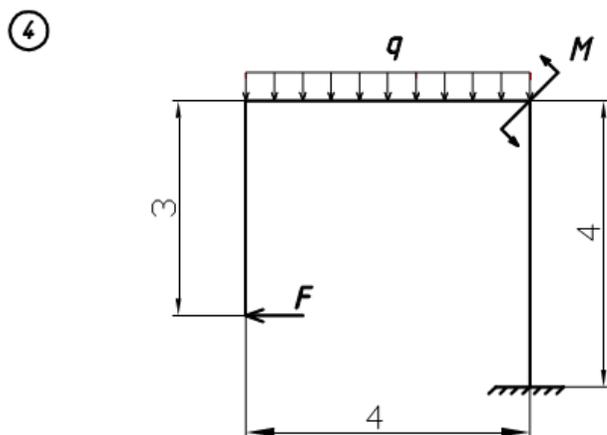
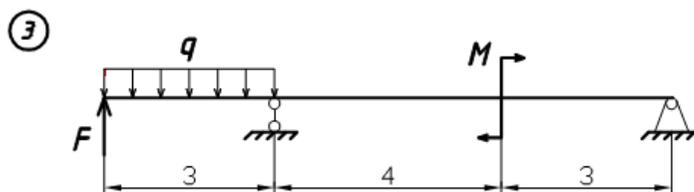
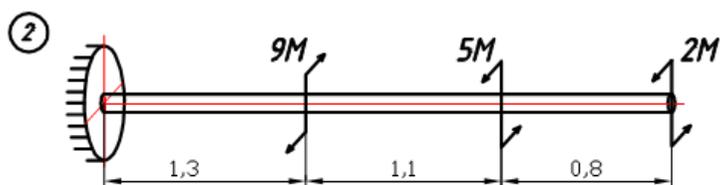
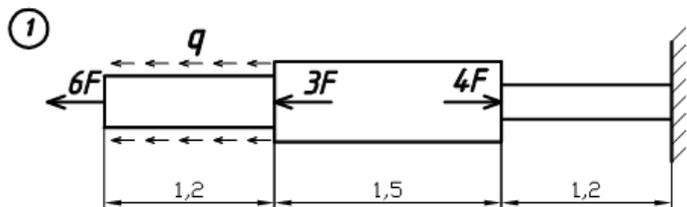
3



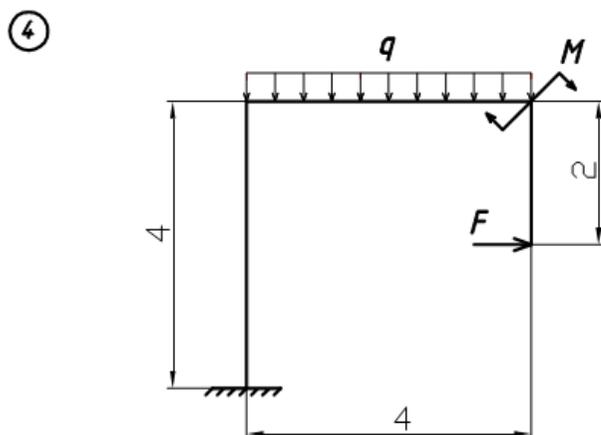
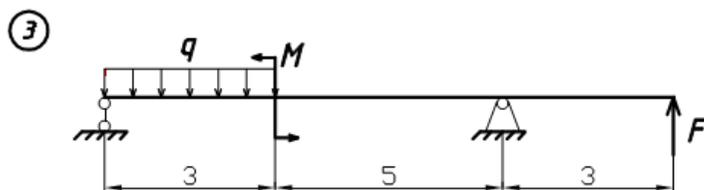
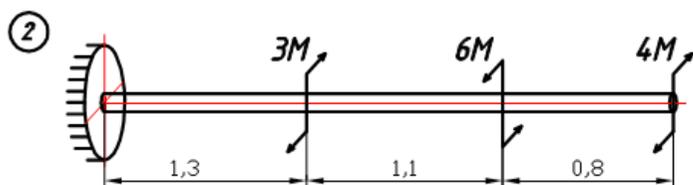
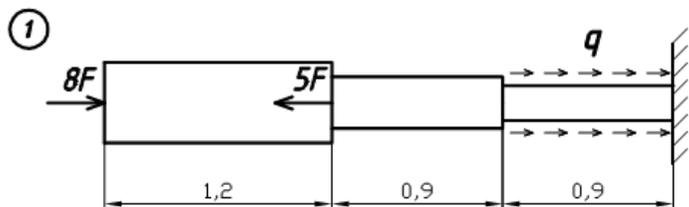
4



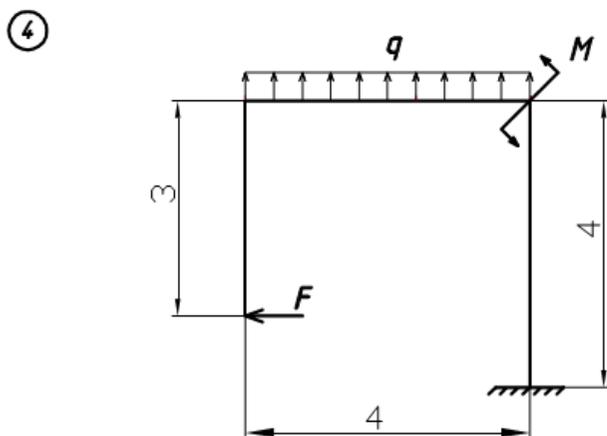
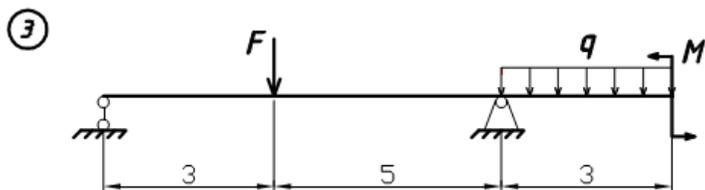
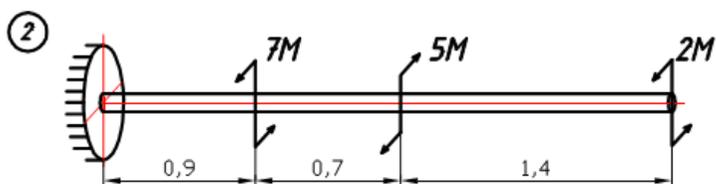
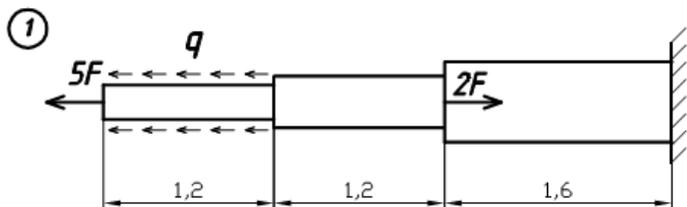
## Вариант 2



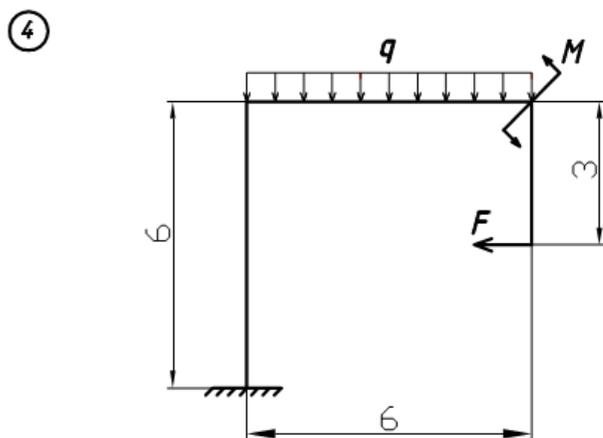
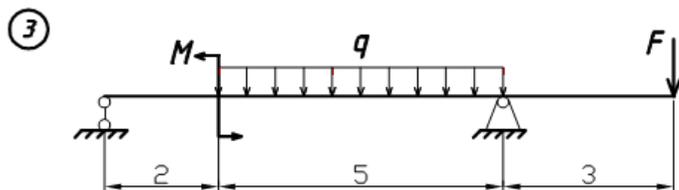
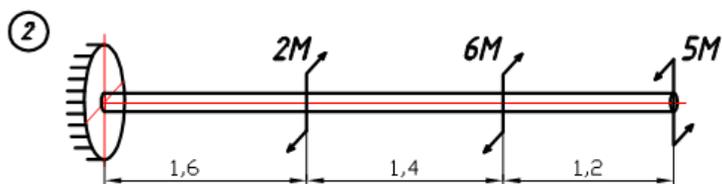
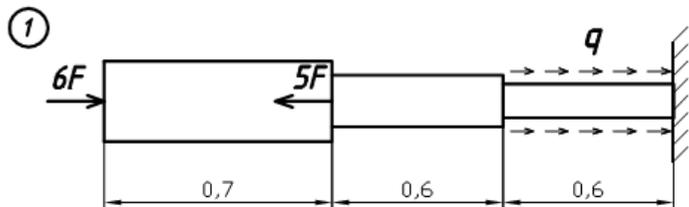
### Вариант 3



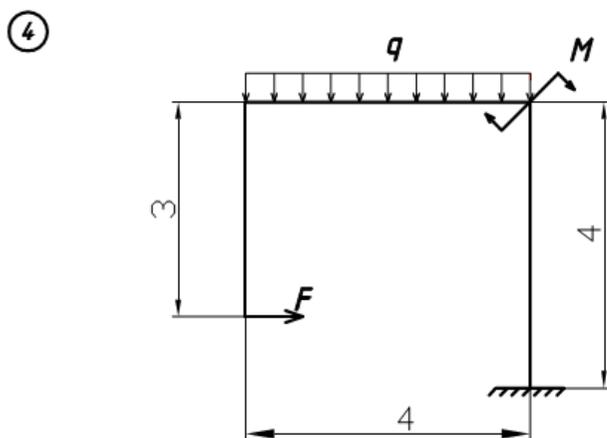
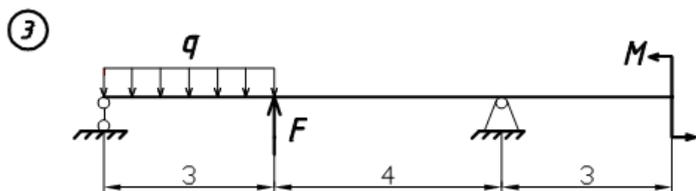
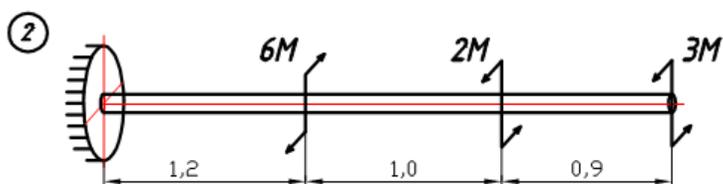
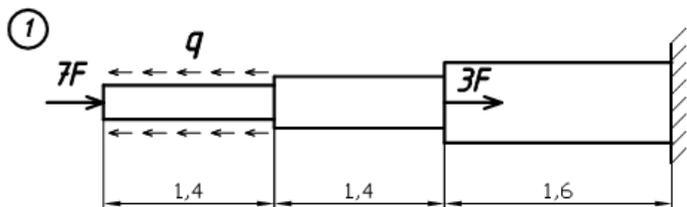
### Вариант 4



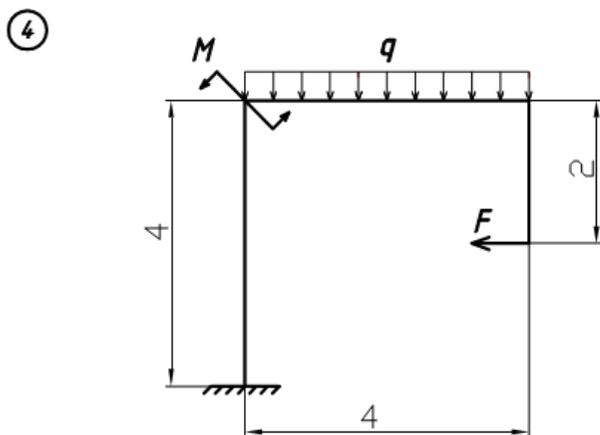
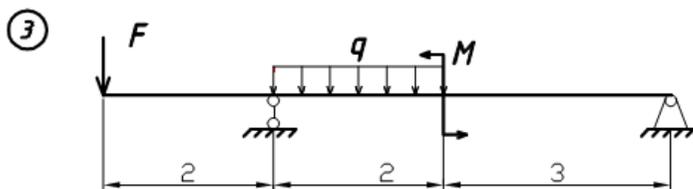
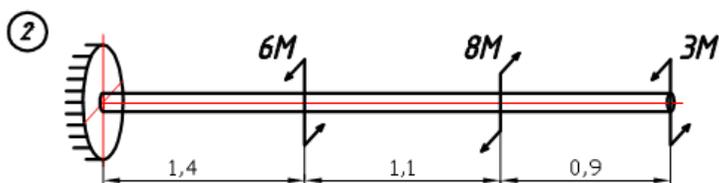
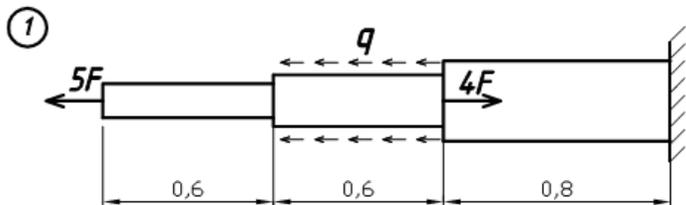
### Вариант 5



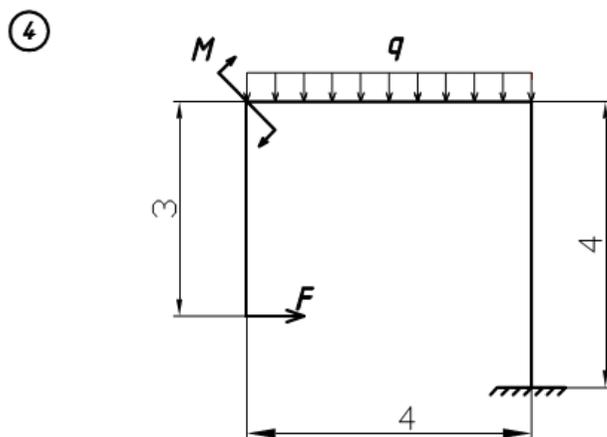
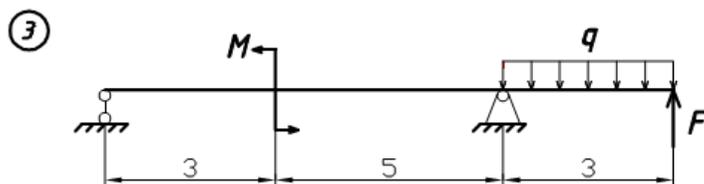
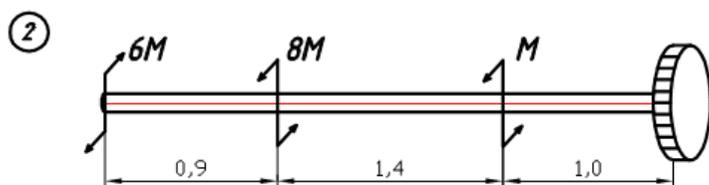
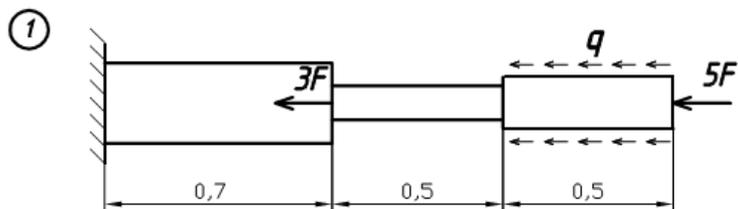
### Вариант 6



### Вариант 7

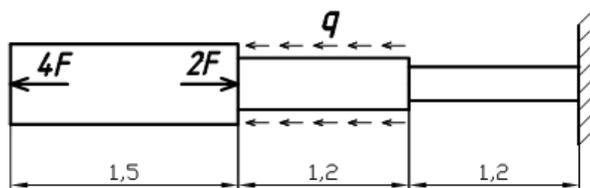


### Вариант 8

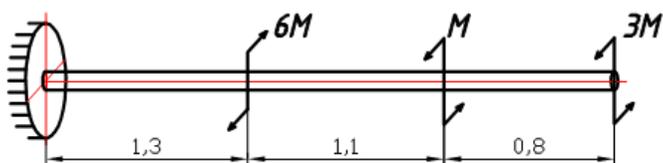


### Вариант 9

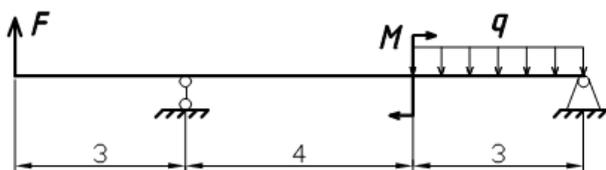
1



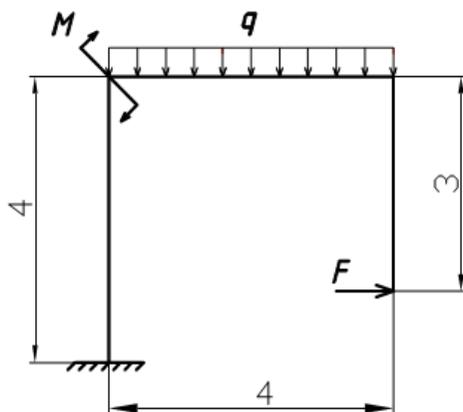
2



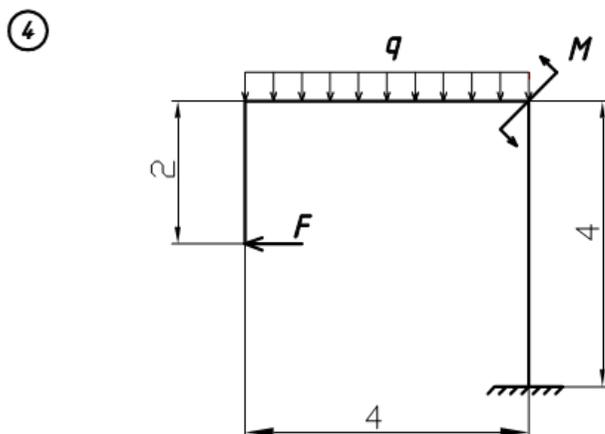
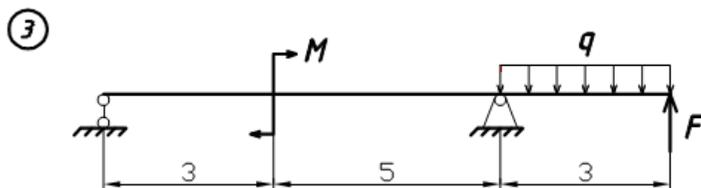
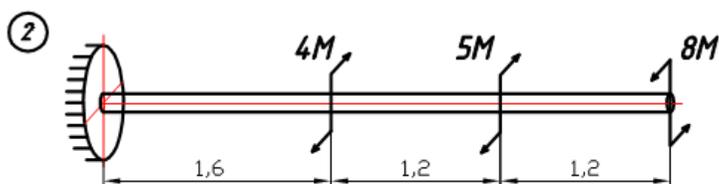
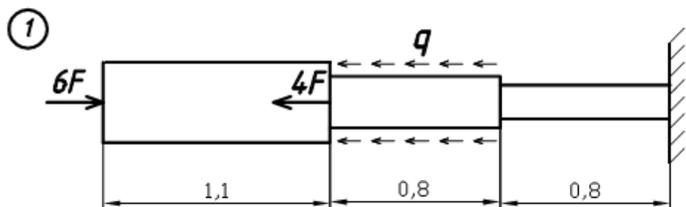
3



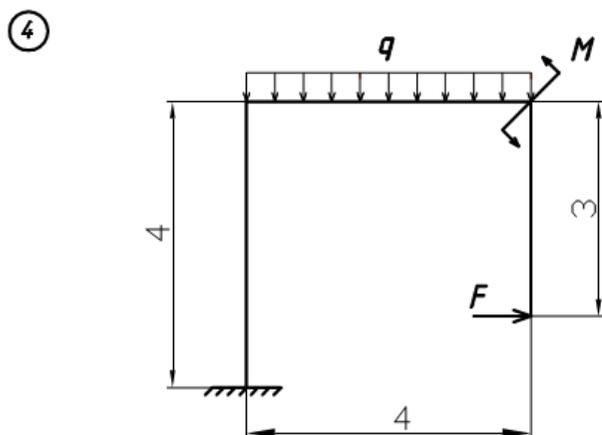
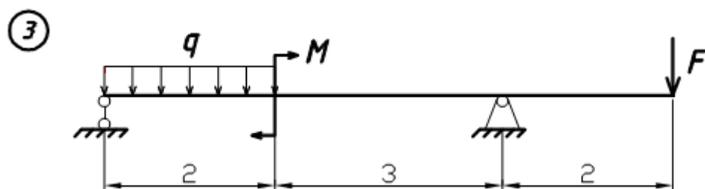
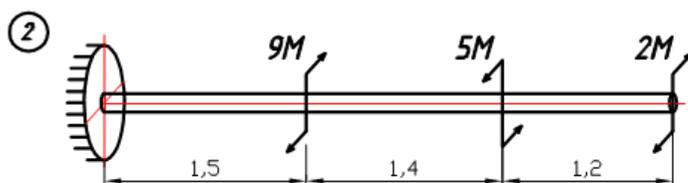
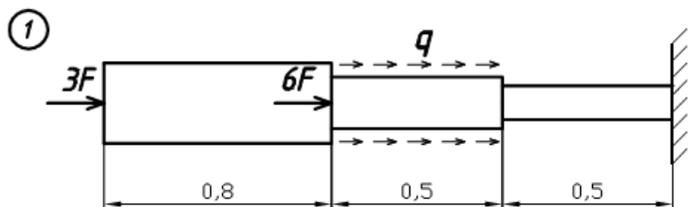
4



### Вариант 10



### Вариант 11

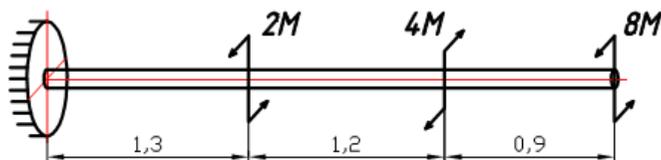


### Вариант 12

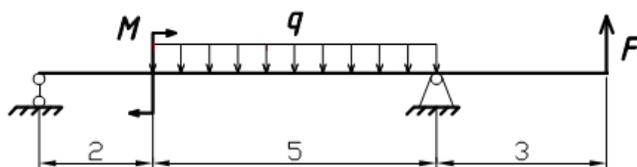
1



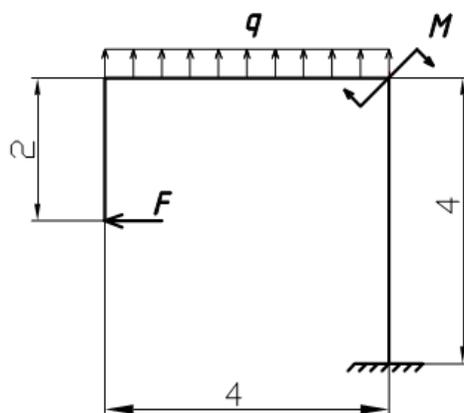
2



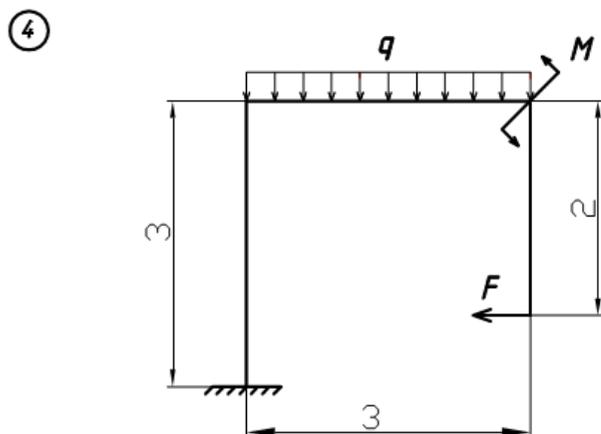
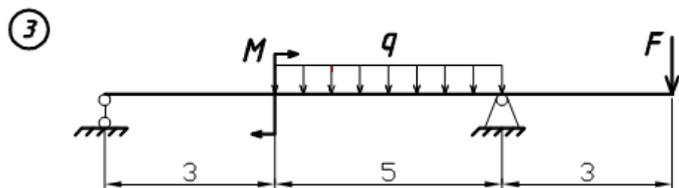
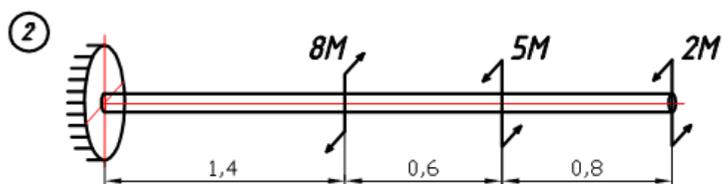
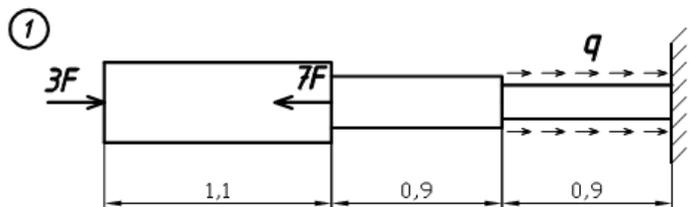
3



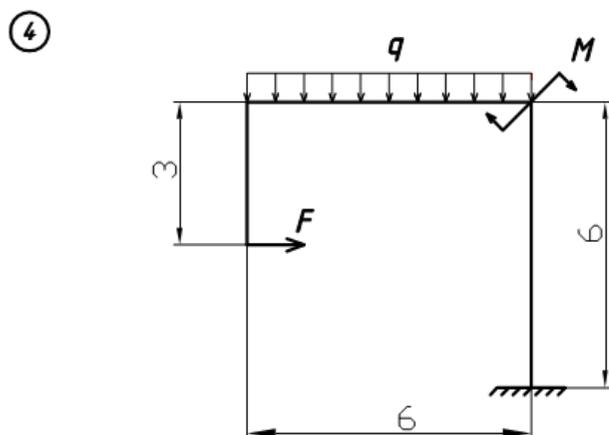
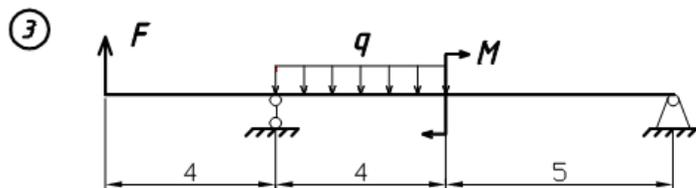
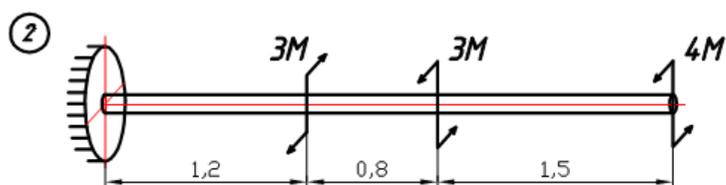
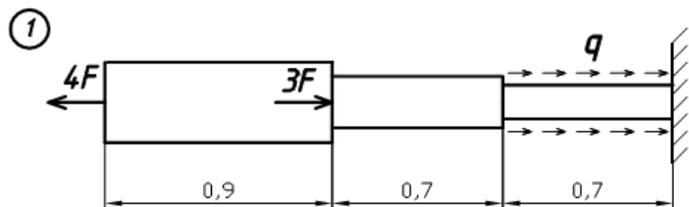
4



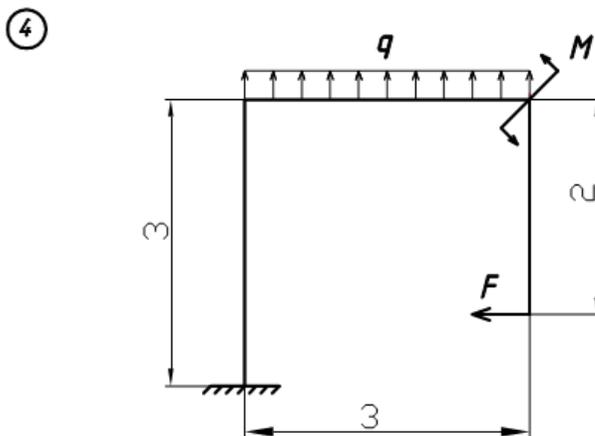
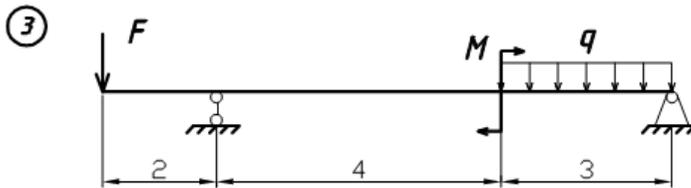
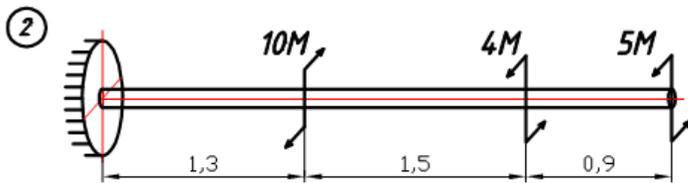
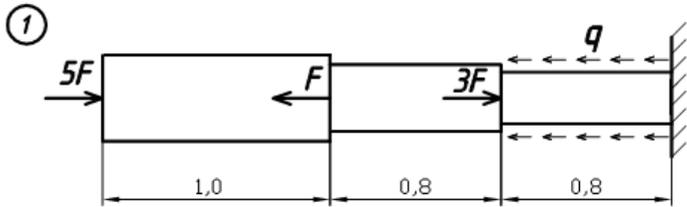
### Вариант 13



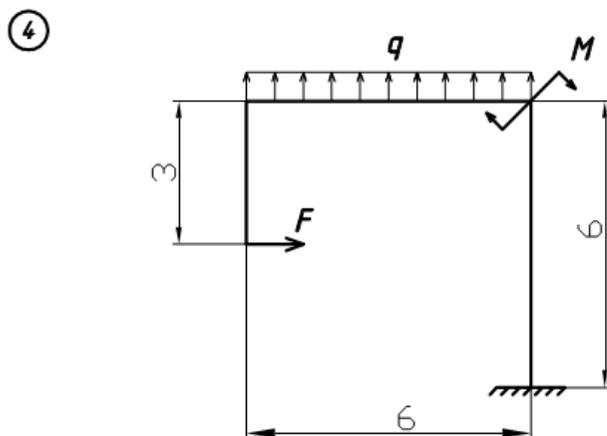
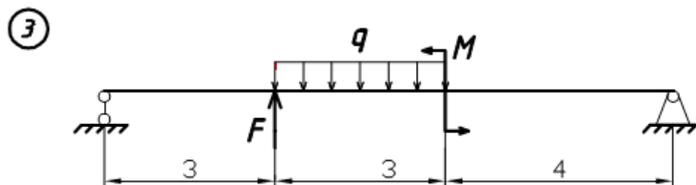
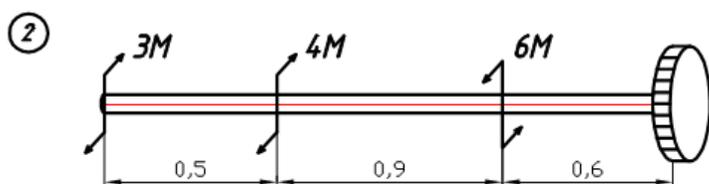
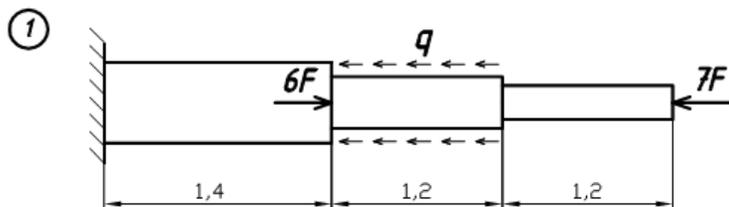
### Вариант 14



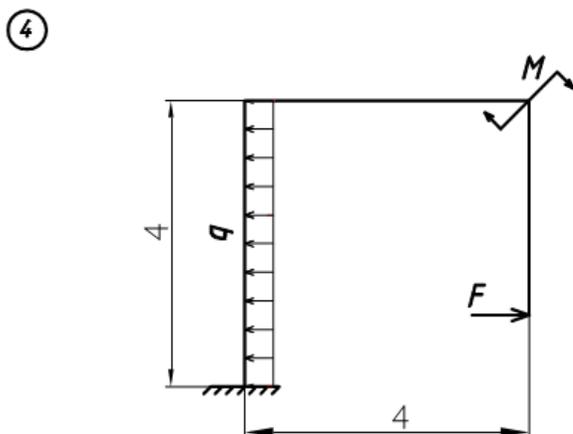
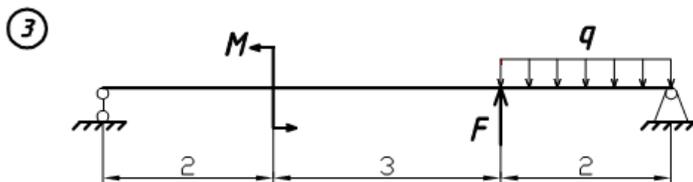
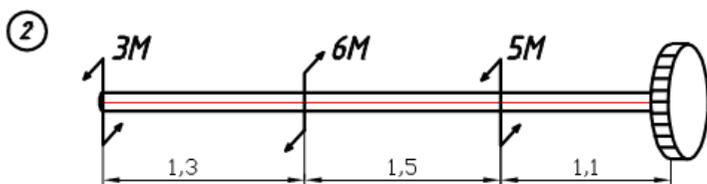
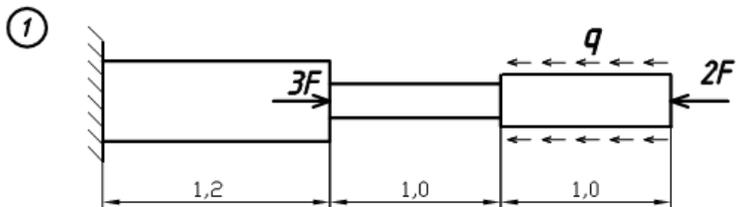
### Вариант 15



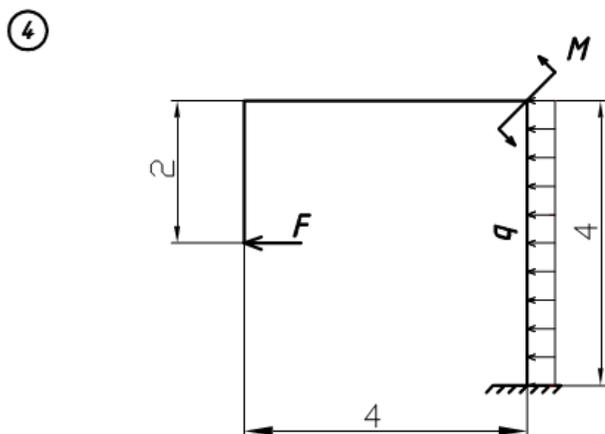
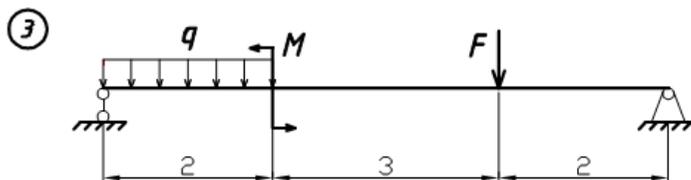
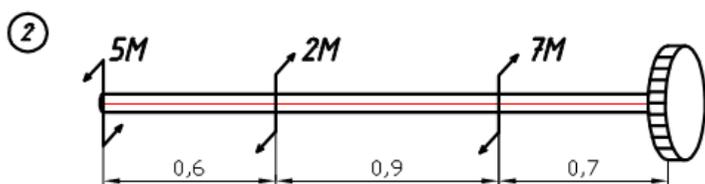
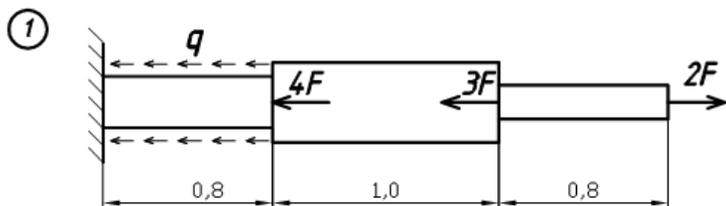
### Вариант 16



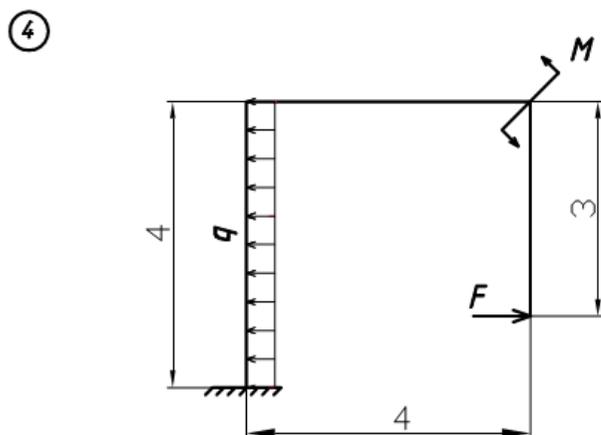
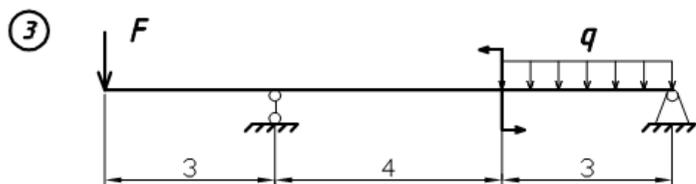
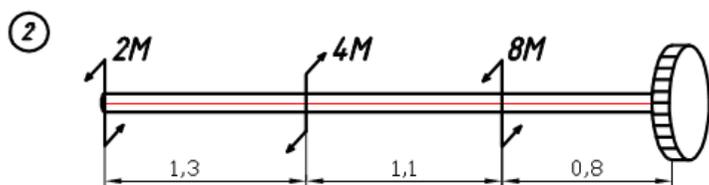
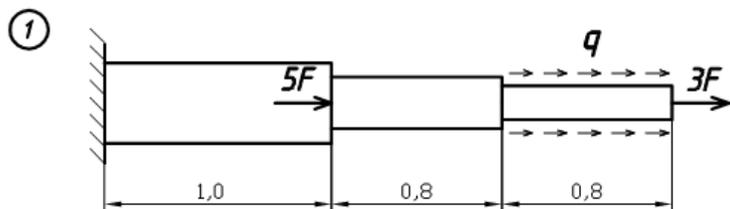
### Вариант 17



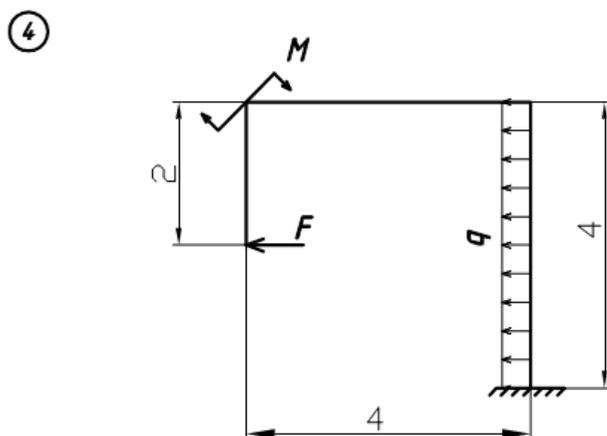
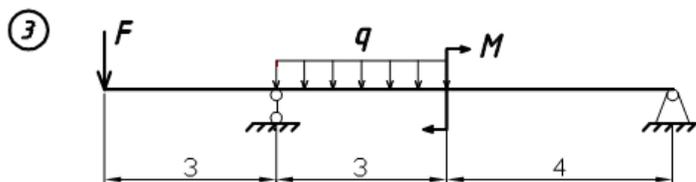
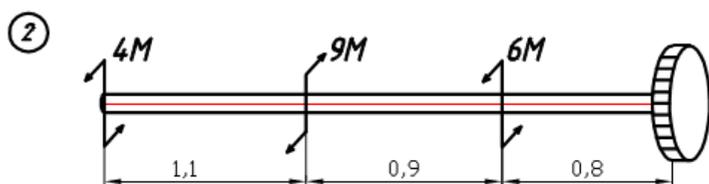
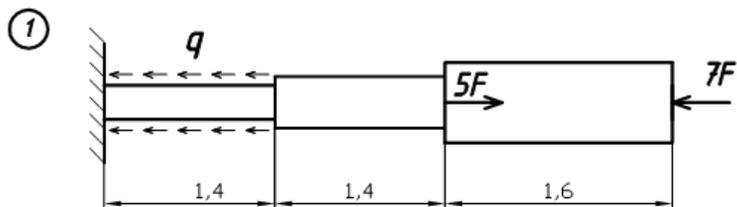
### Вариант 18



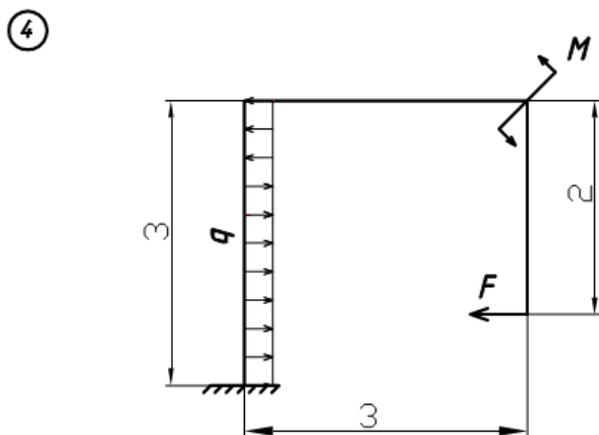
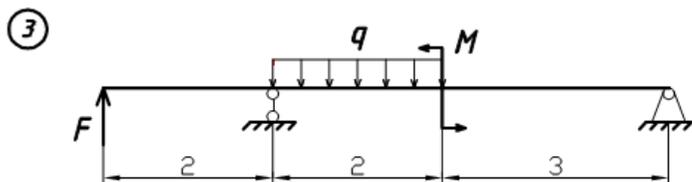
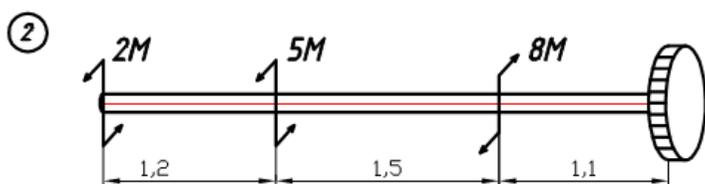
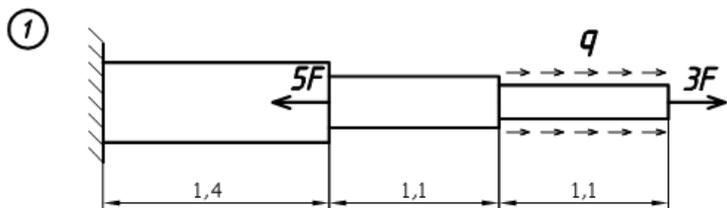
### Вариант 19



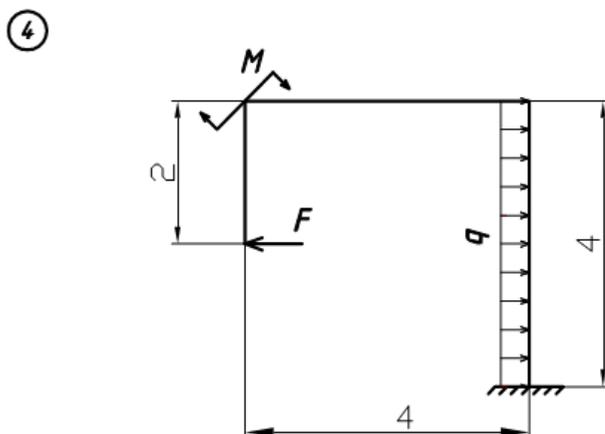
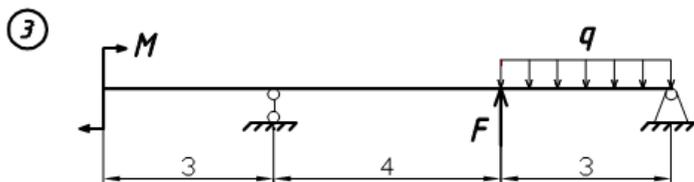
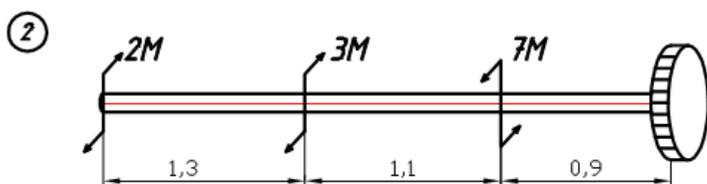
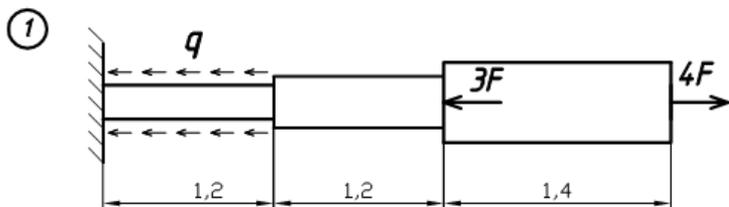
### Вариант 20



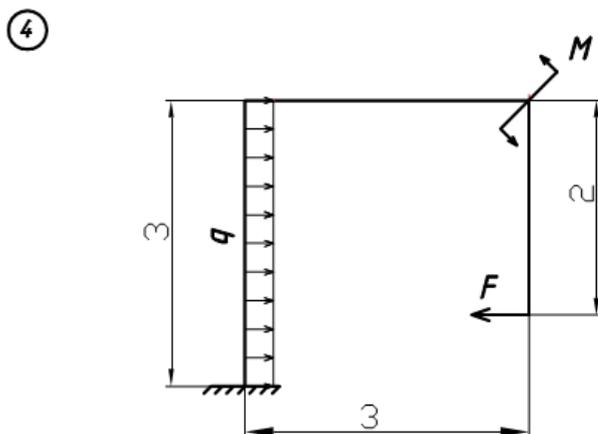
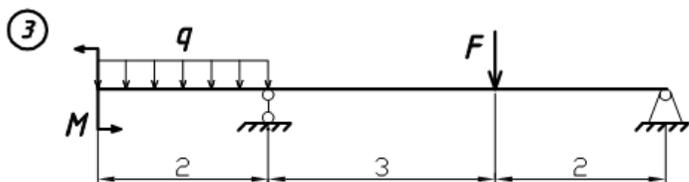
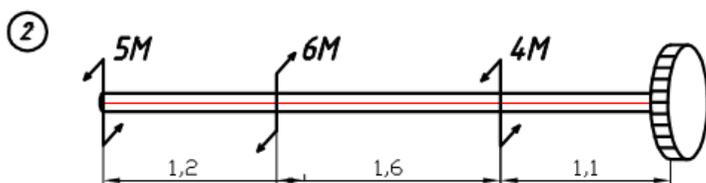
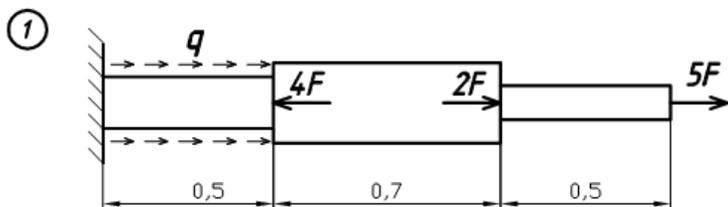
### Вариант 21



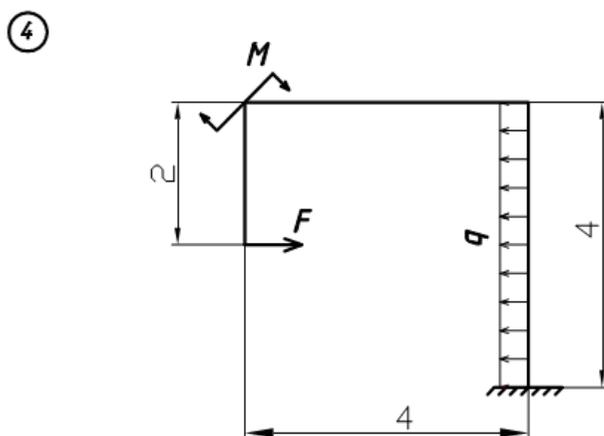
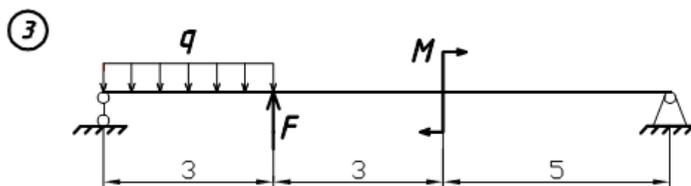
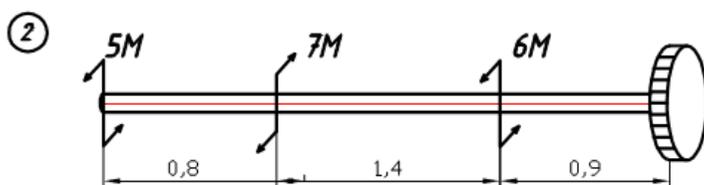
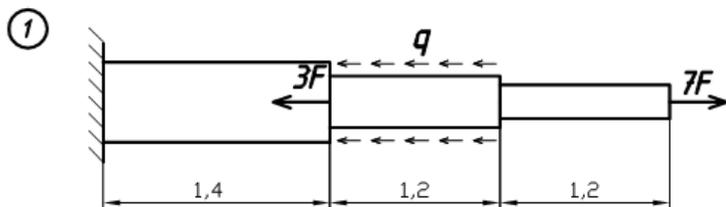
### Вариант 22



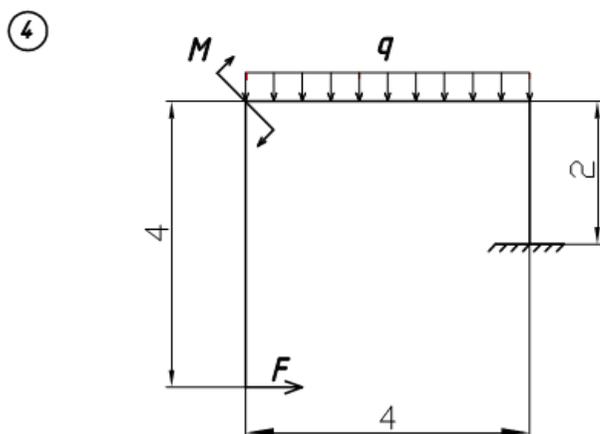
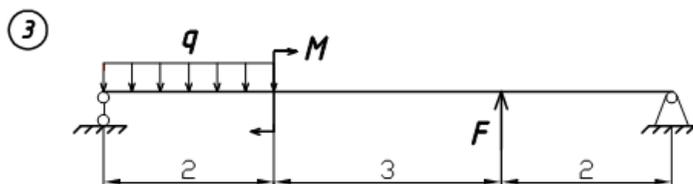
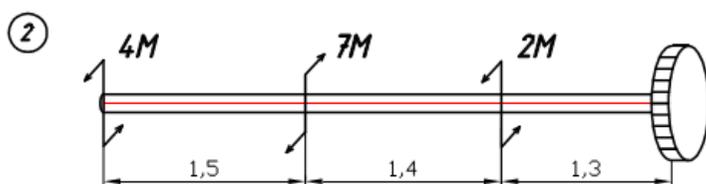
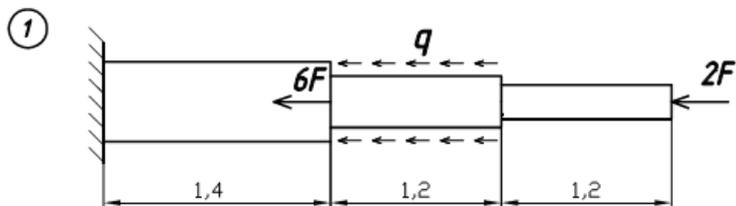
### Вариант 23



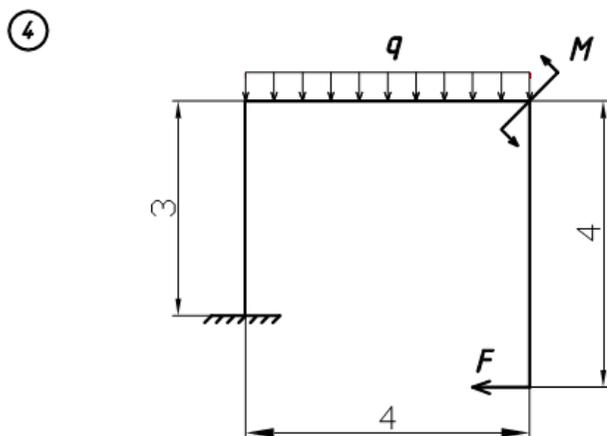
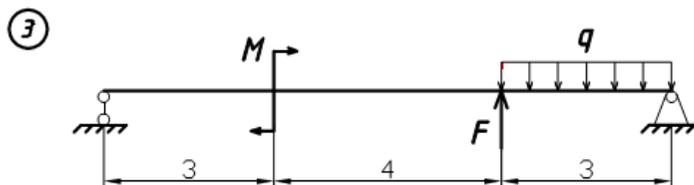
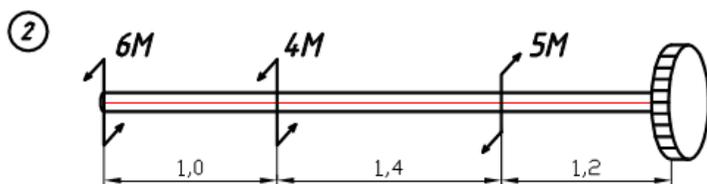
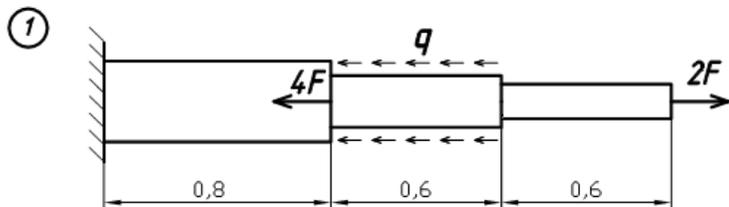
### Вариант 24



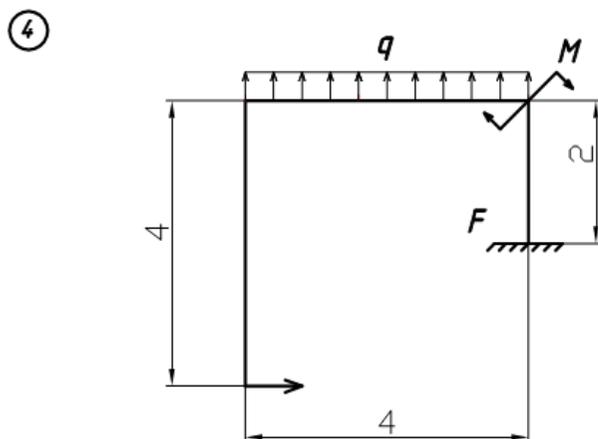
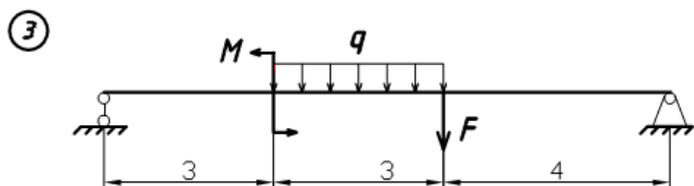
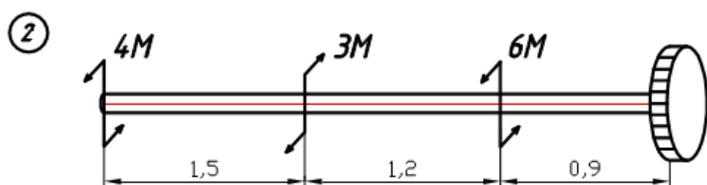
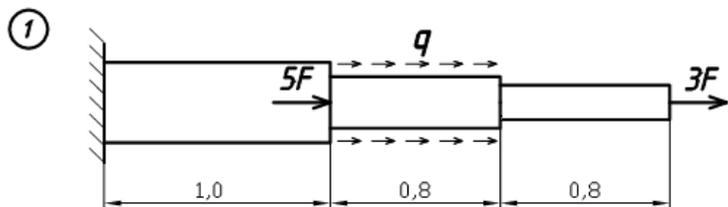
### Вариант 25



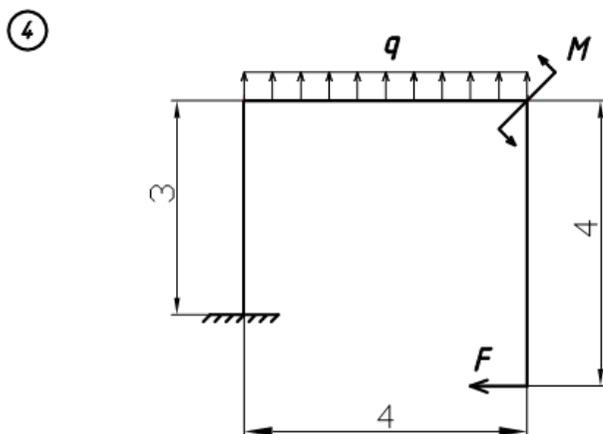
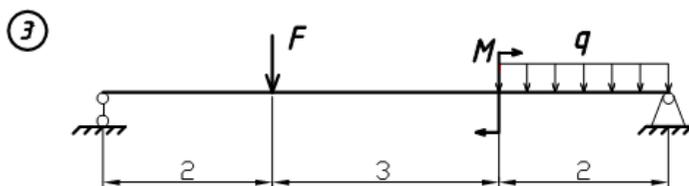
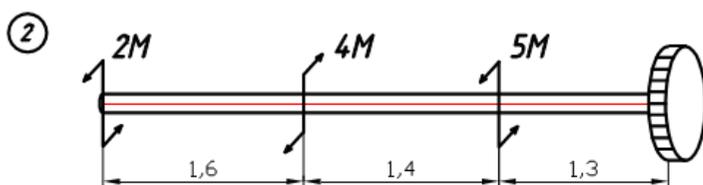
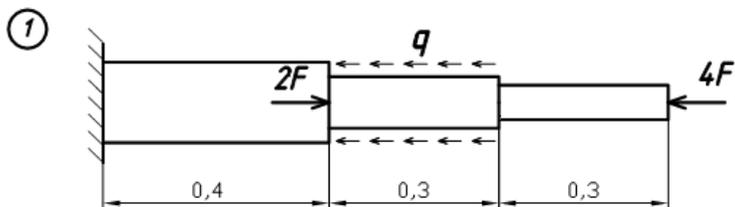
### Вариант 26



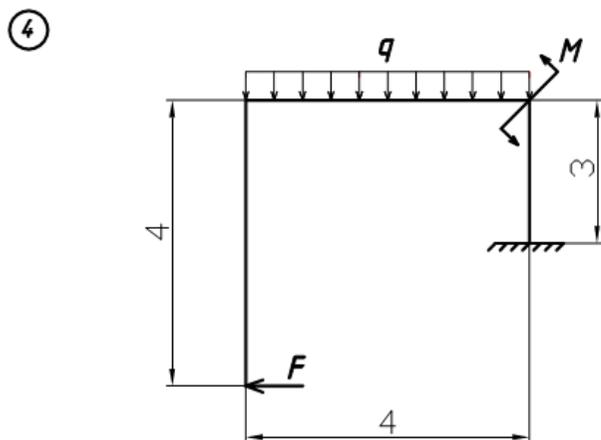
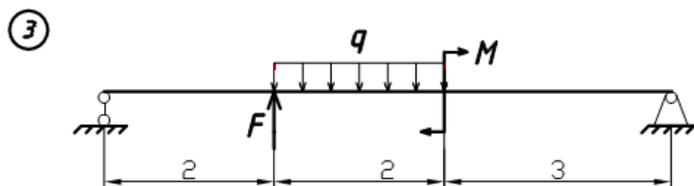
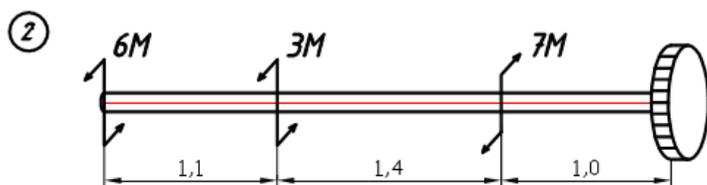
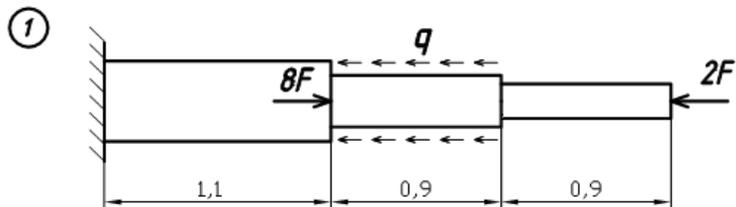
### Вариант 27



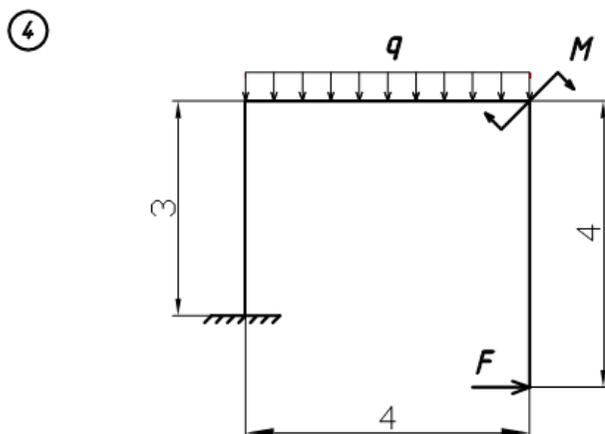
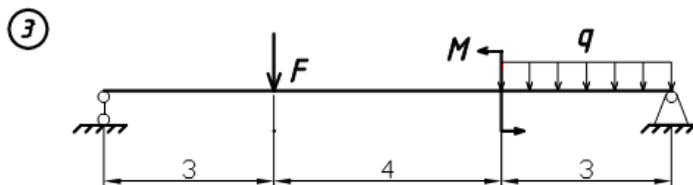
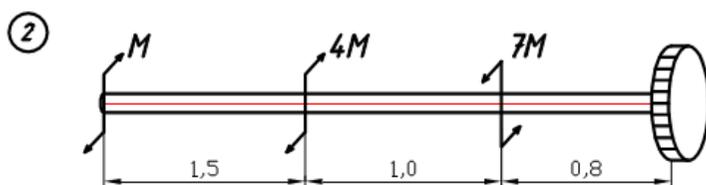
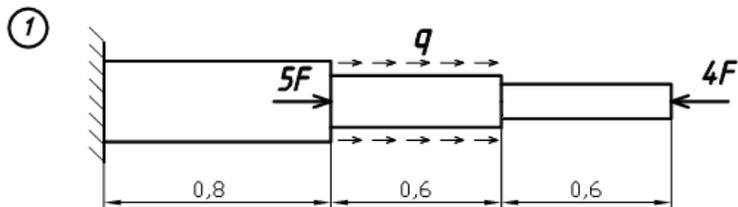
### Вариант 28



### Вариант 29



Вариант 30



## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

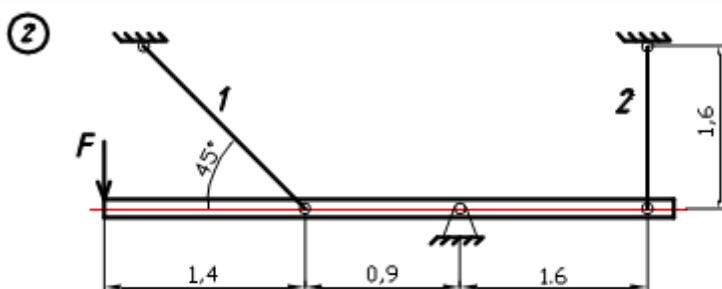
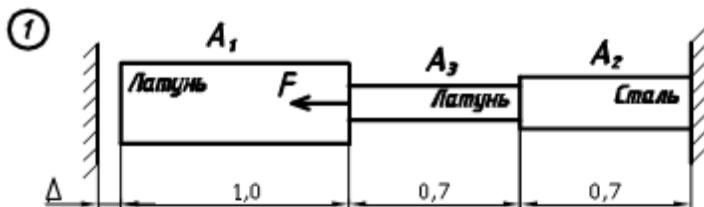
ЗАДАНИЕ к главе 2:

Определить внутренние силовые факторы и построить их эпюры.

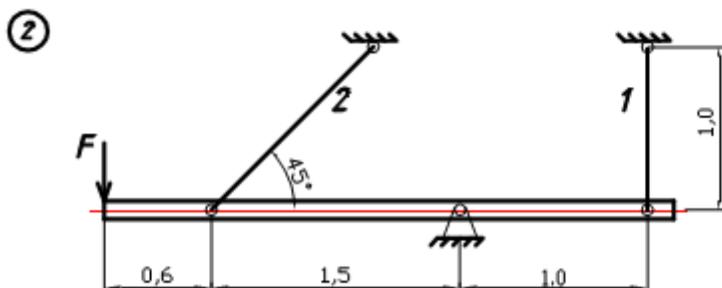
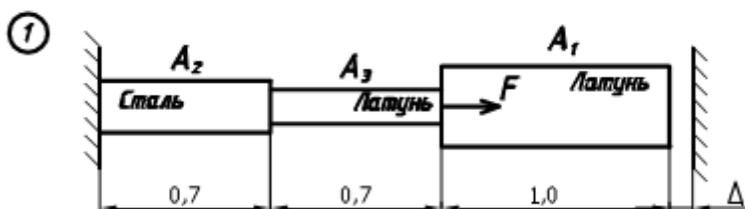
Таблица 2 – Варианты заданий

№ Вар.	F, кН	A <sub>1</sub> , см <sup>2</sup>	A <sub>2</sub> , см <sup>2</sup>	A <sub>3</sub> , см <sup>2</sup>	Δ, мм	Δt, °С
1	20	25	20	15	0,20	35
2	25	20	15	10	0,30	40
3	30	25	20	15	0,40	45
4	35	20	15	10	0,25	25
5	40	25	20	15	0,35	30
6	45	20	15	10	0,45	35
7	50	25	20	15	0,20	40
8	35	20	15	10	0,30	45
9	25	25	20	15	0,40	25
10	35	20	15	10	0,25	30
11	40	25	20	15	0,35	35
12	45	20	15	10	0,45	40
13	50	25	20	15	0,20	45
14	55	20	15	10	0,30	25
15	20	25	20	15	0,40	30
16	25	20	15	10	0,25	25
17	30	25	20	15	0,35	30
18	35	20	15	10	0,45	35
19	40	25	20	15	0,20	40
20	45	20	15	10	0,30	45
21	50	25	20	15	0,40	25
22	20	20	15	10	0,25	30
23	25	25	20	15	0,35	35
24	30	20	15	10	0,45	40
25	35	25	20	15	0,20	45
26	40	20	15	10	0,30	25
27	45	25	20	15	0,40	35
28	50	20	15	10	0,25	40
29	20	25	20	15	0,35	45
30	25	20	15	10	0,45	25

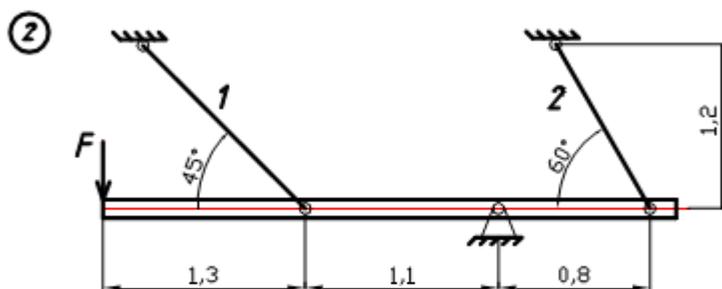
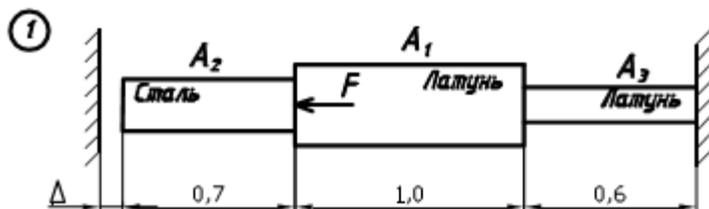
### Вариант 1



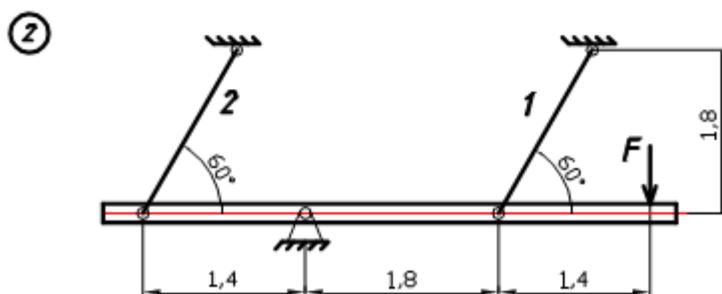
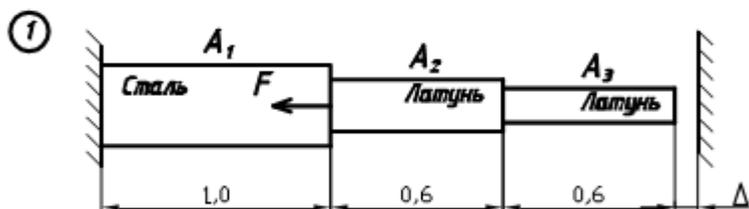
### Вариант 2



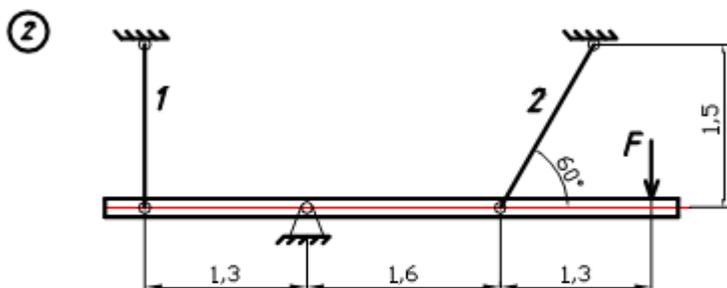
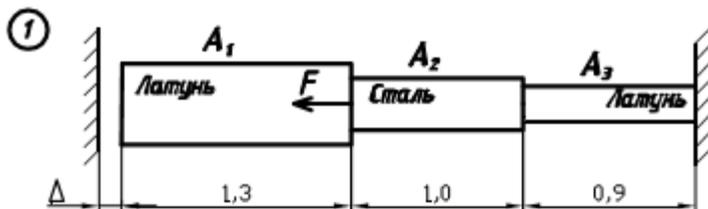
### Вариант 3



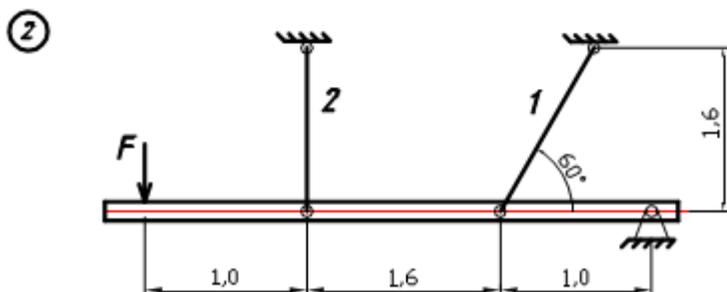
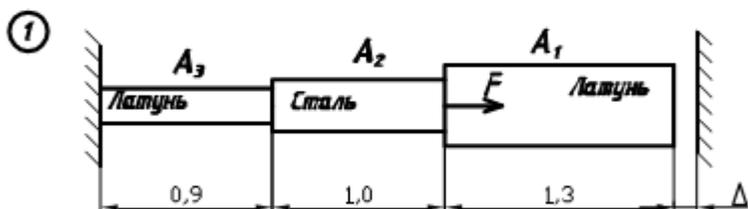
### Вариант 4



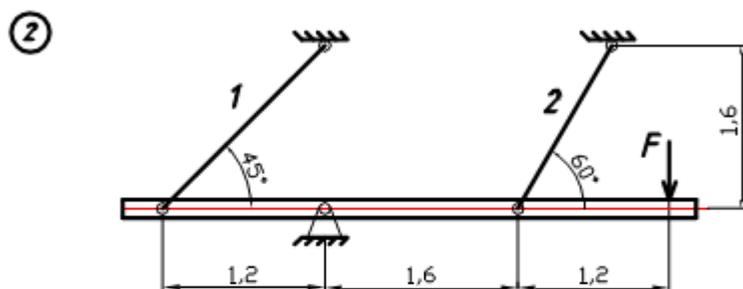
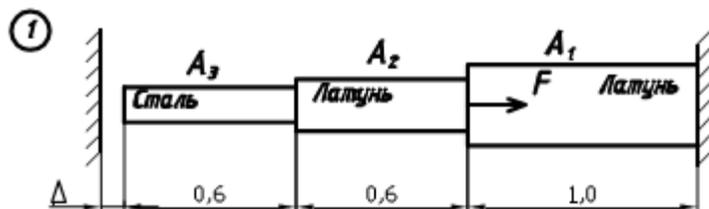
### Вариант 5



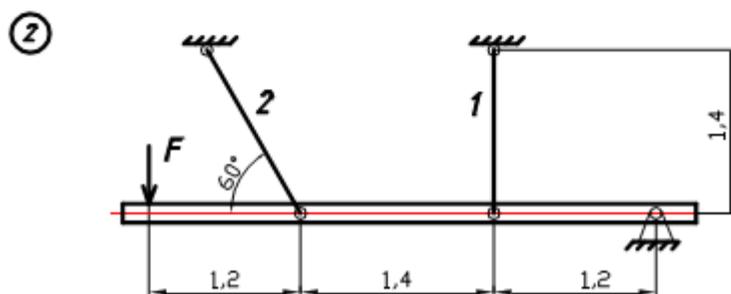
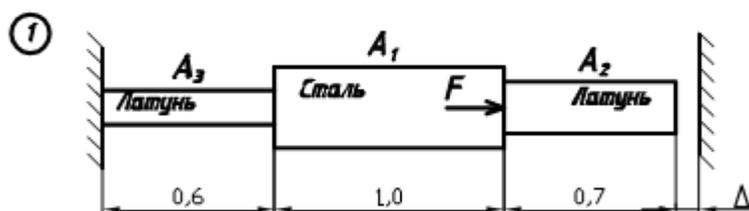
### Вариант 6



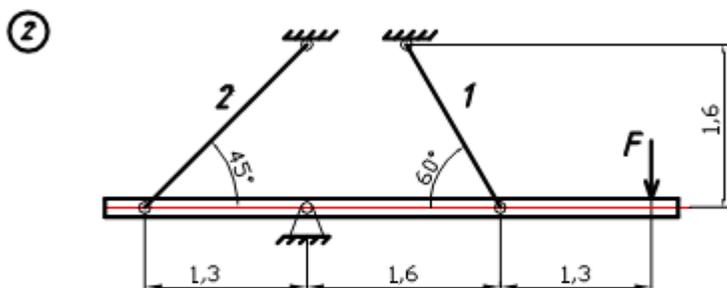
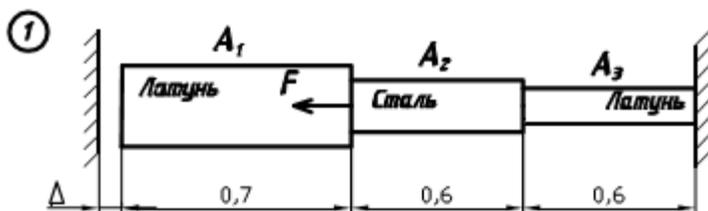
### Вариант 7



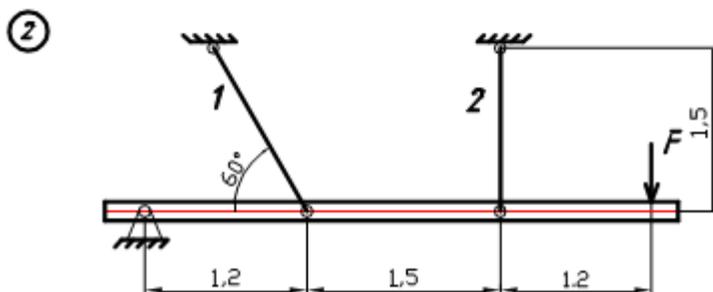
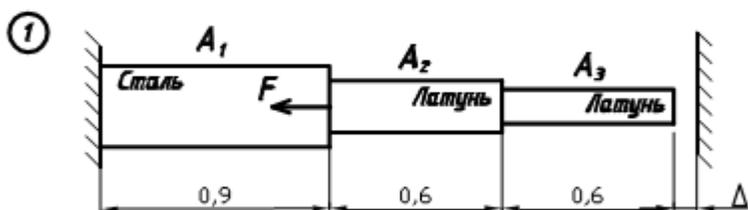
### Вариант 8



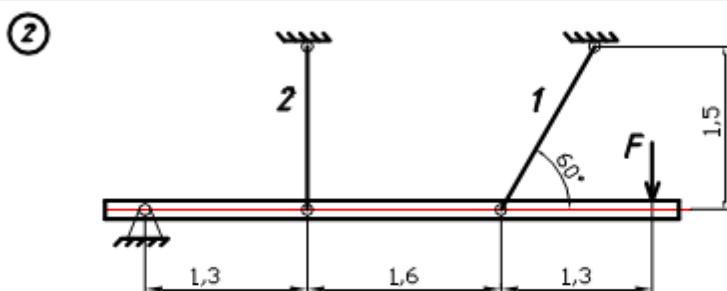
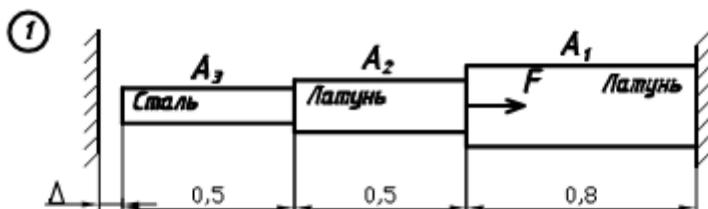
### Вариант 9



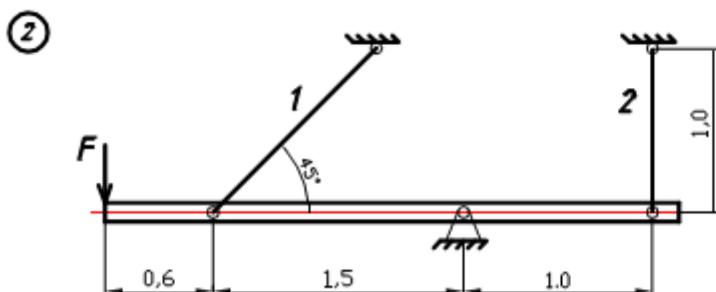
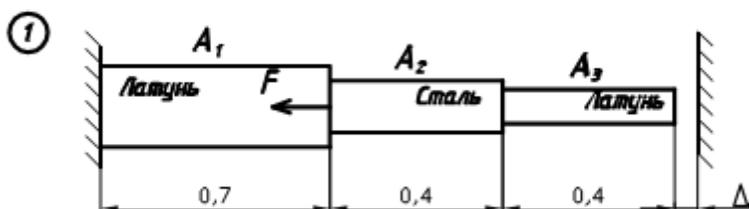
### Вариант 10



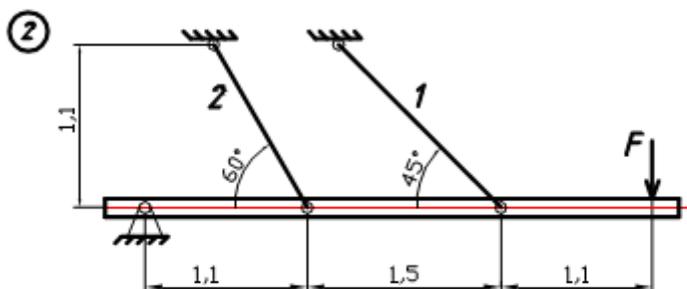
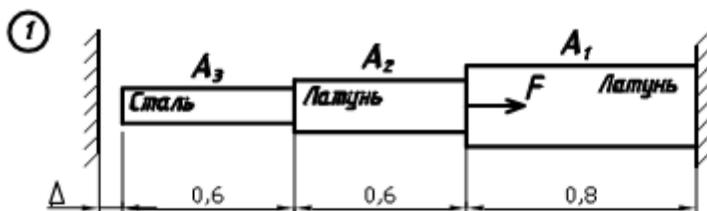
### Вариант 11



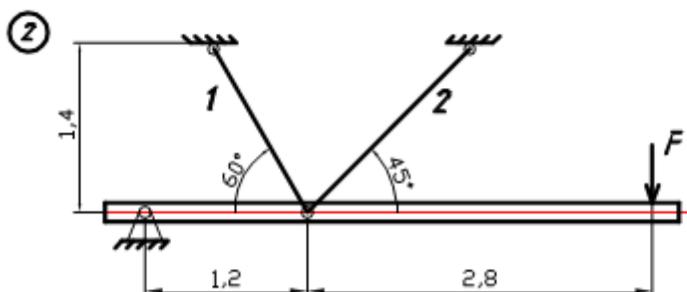
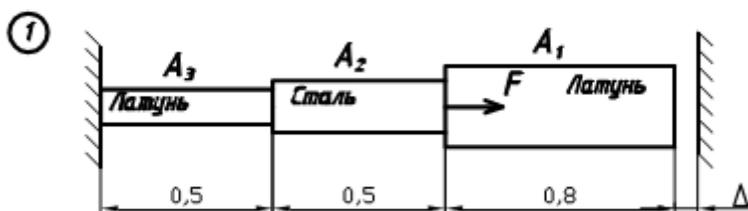
### Вариант 12



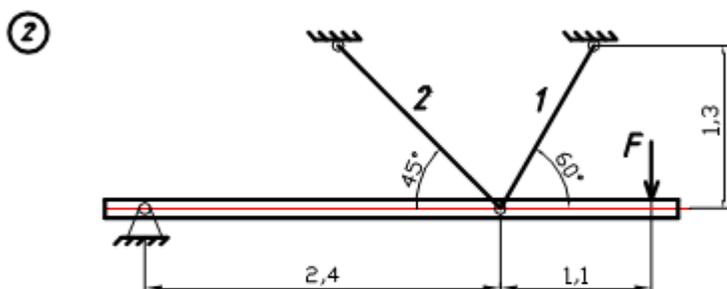
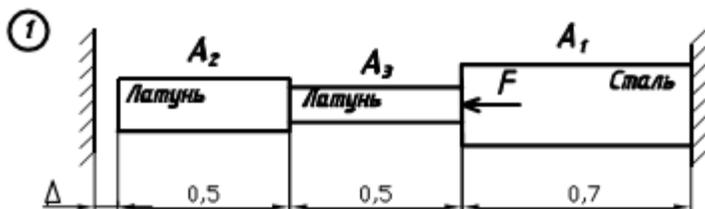
### Вариант 13



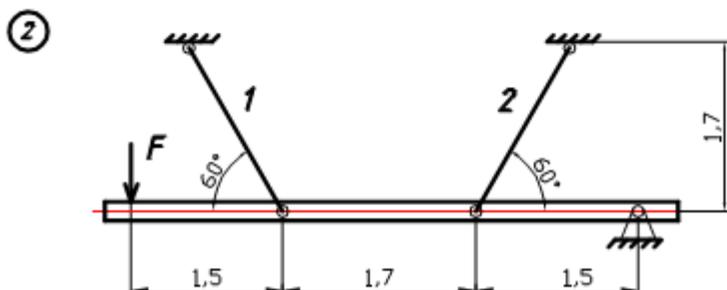
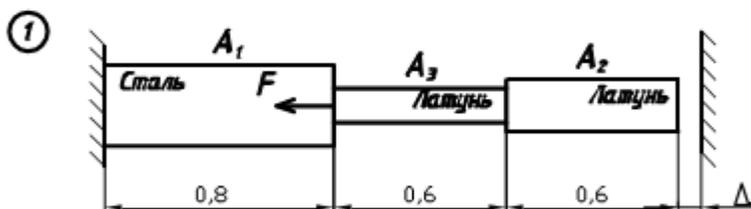
### Вариант 14



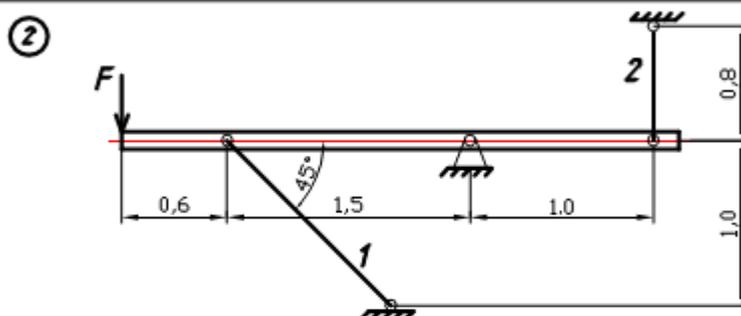
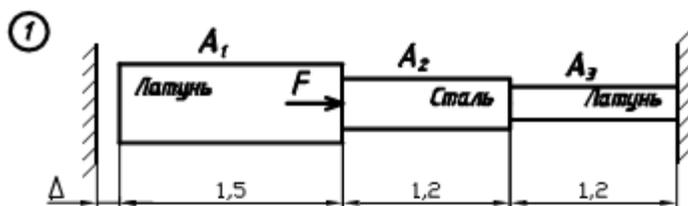
### Вариант 15



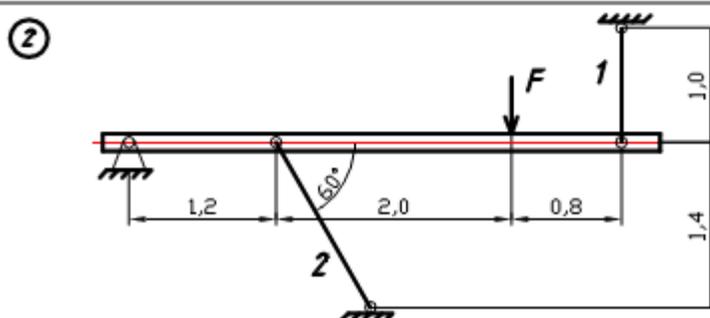
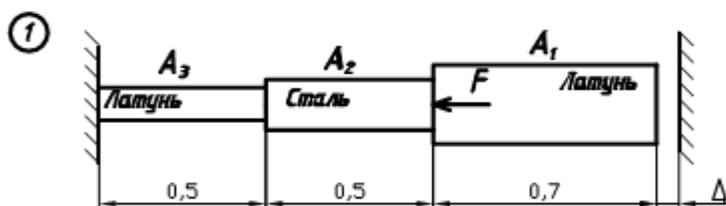
### Вариант 16



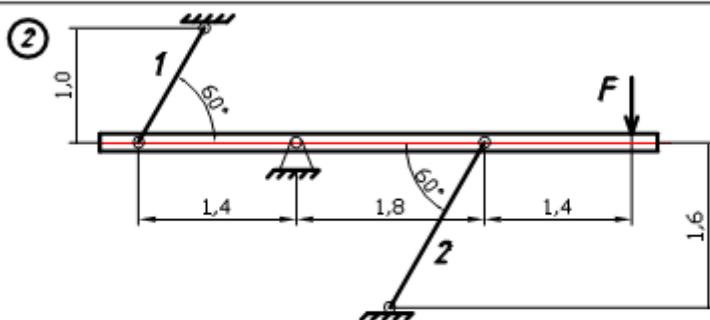
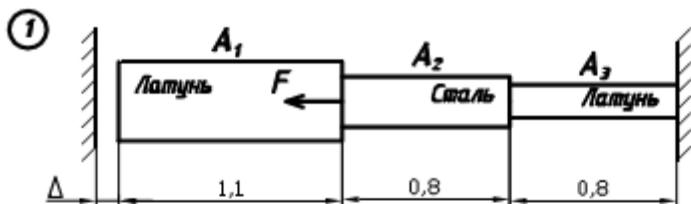
### Вариант 17



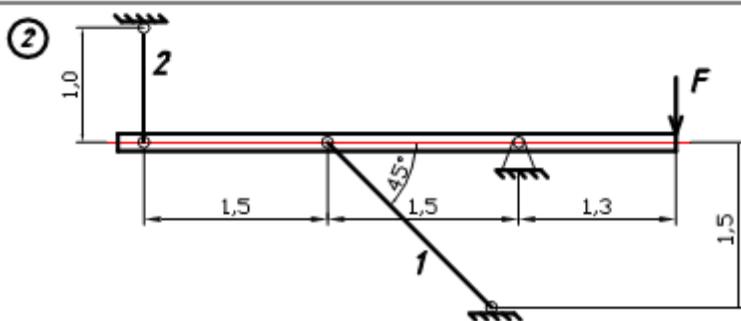
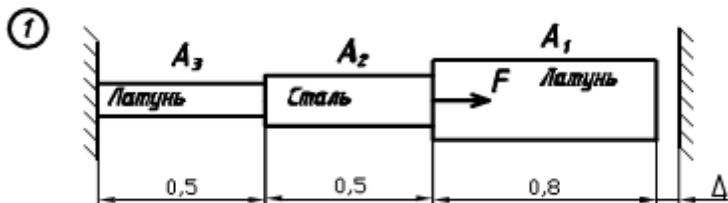
### Вариант 18



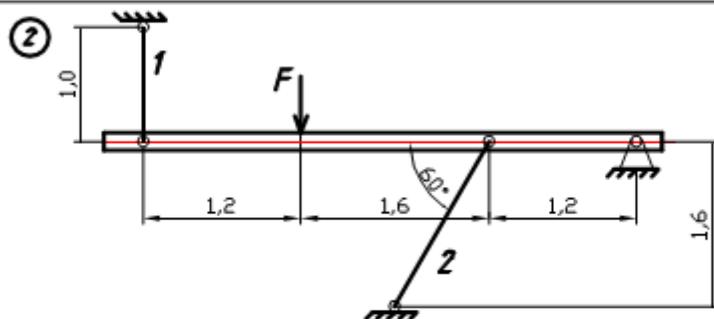
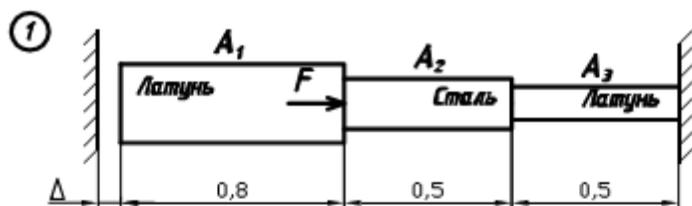
### Вариант 19



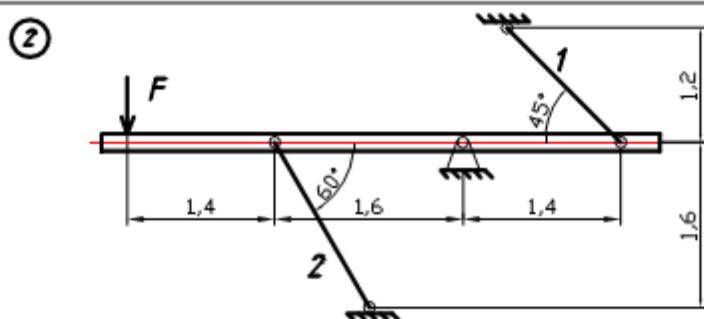
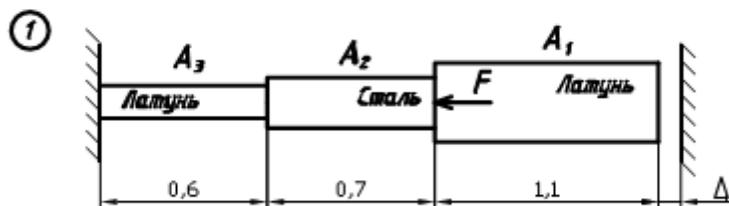
### Вариант 20



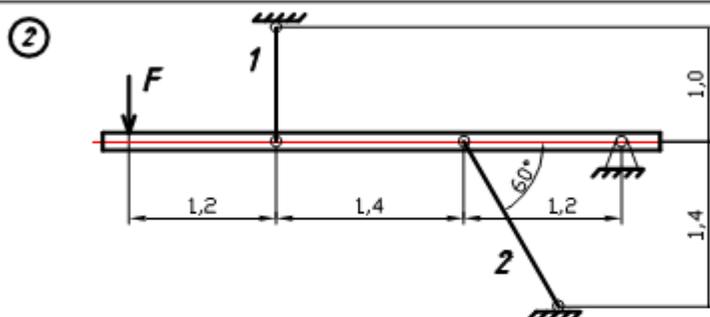
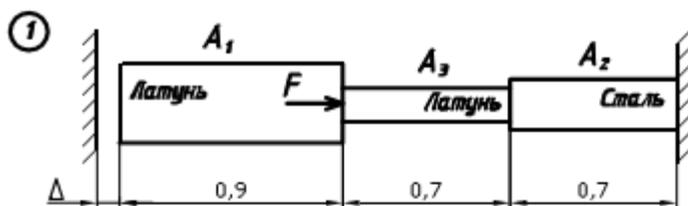
### Вариант 21



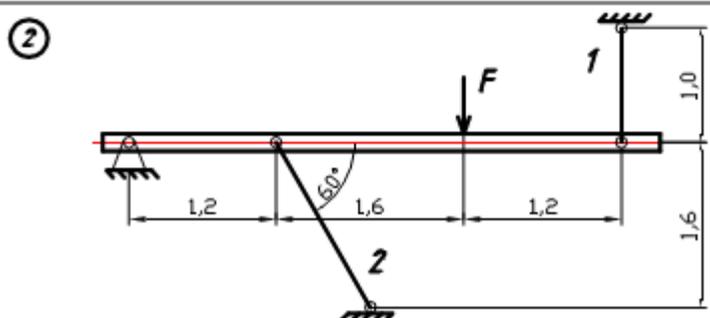
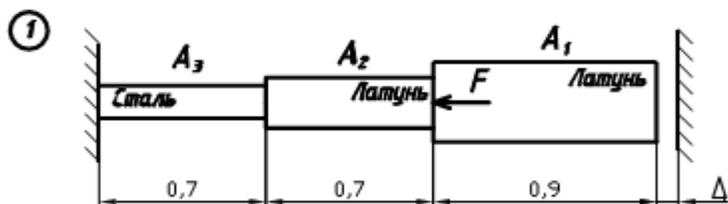
### Вариант 22



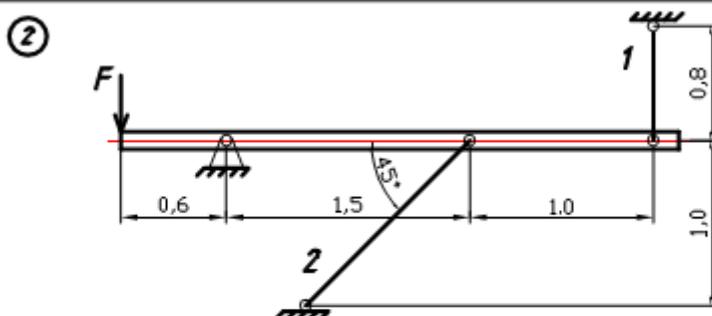
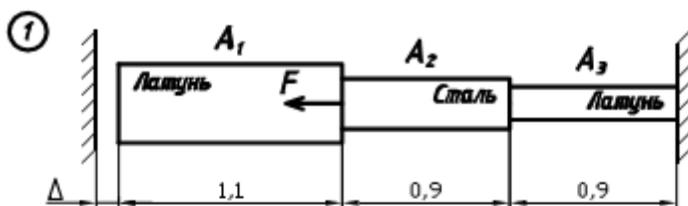
### Вариант 23



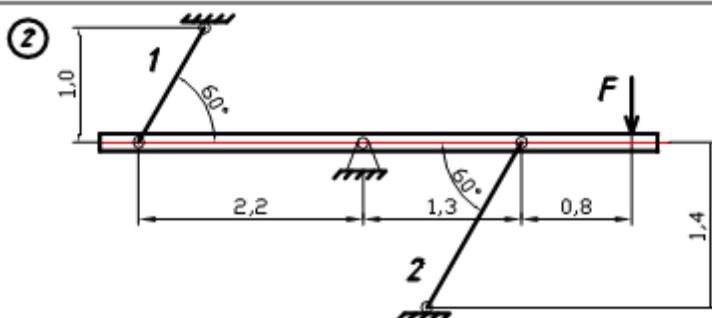
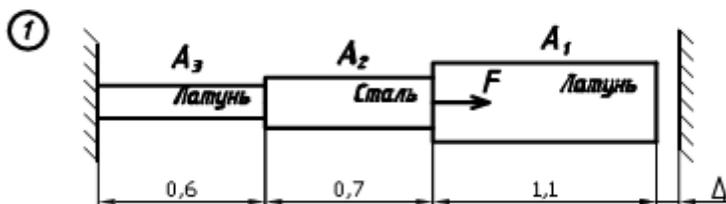
### Вариант 24



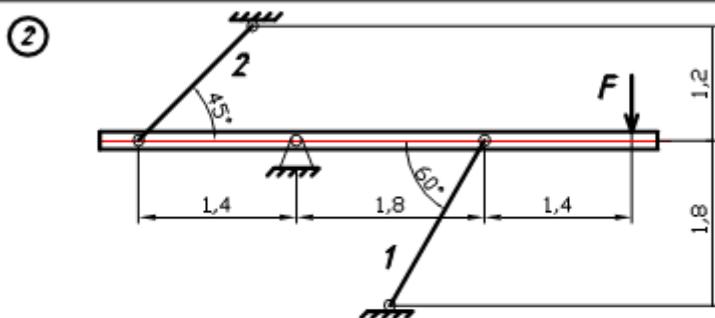
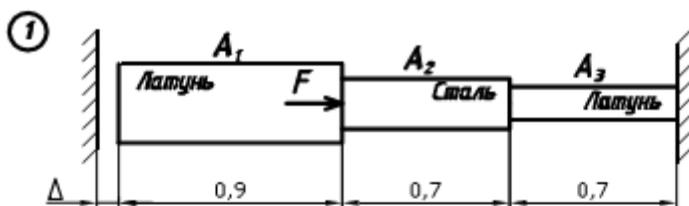
### Вариант 25



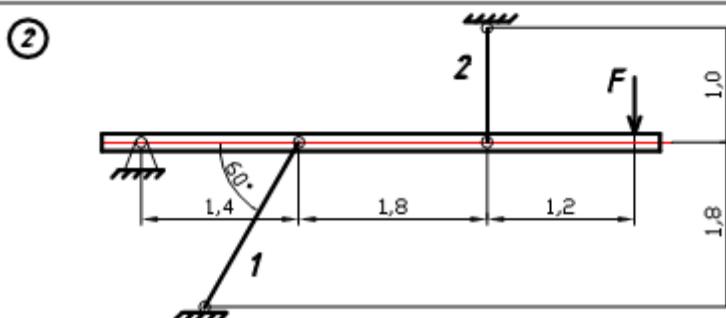
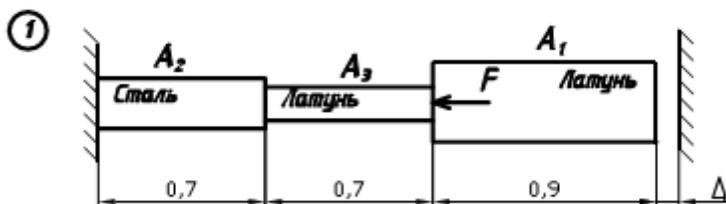
### Вариант 26



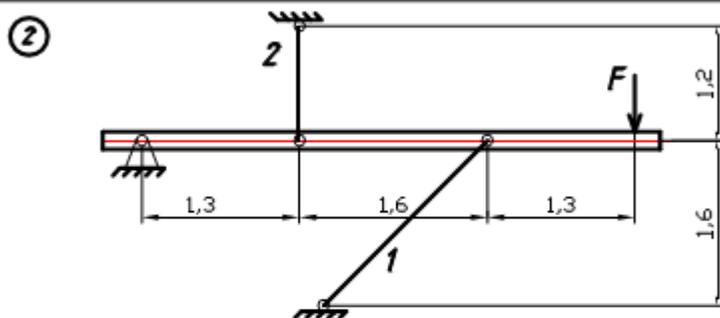
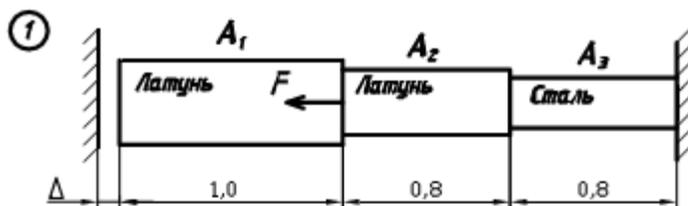
### Вариант 27



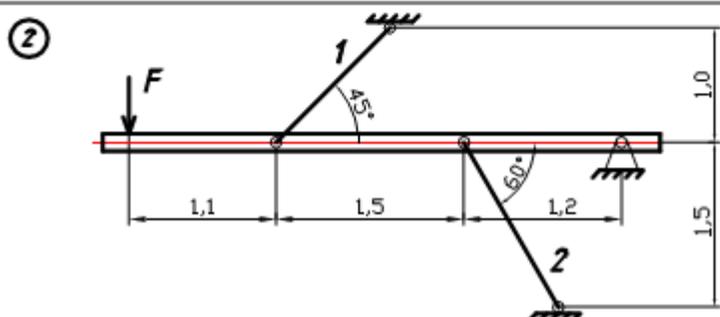
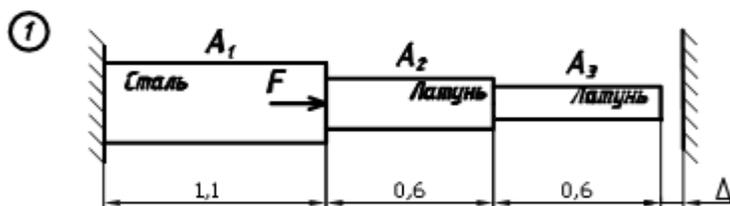
### Вариант 28



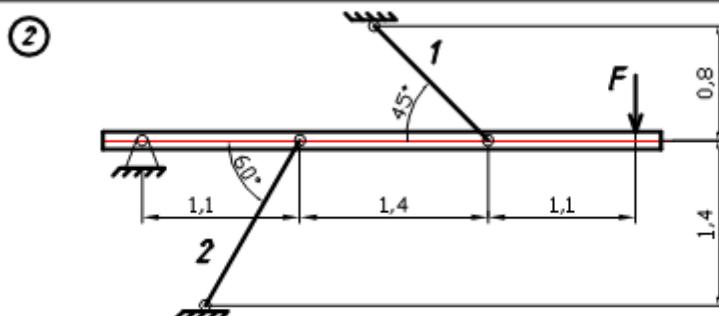
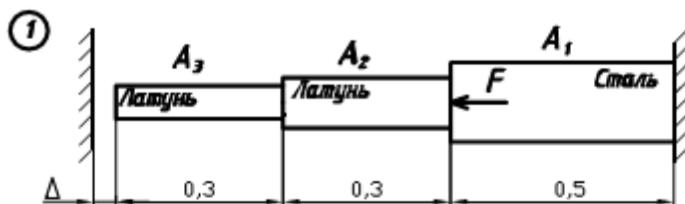
### Вариант 29



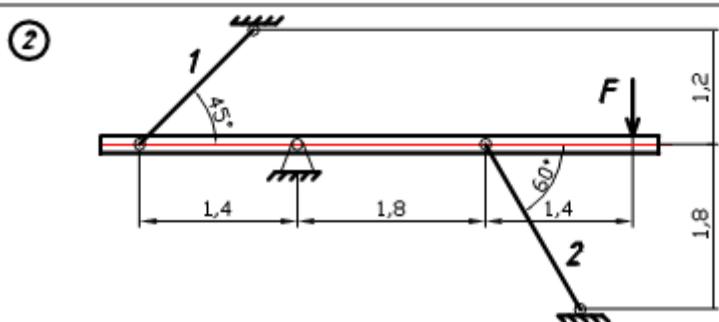
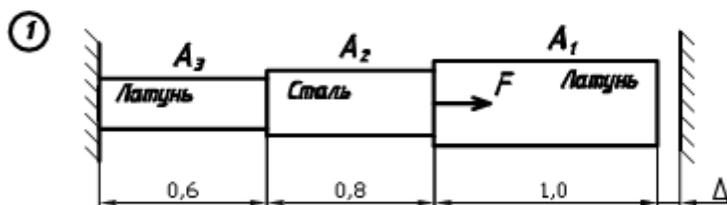
### Вариант 30



### Вариант 31



### Вариант 32



## ПРИЛОЖЕНИЕ В

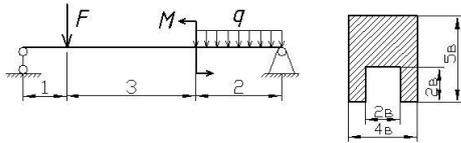
ЗАДАНИЕ к главе 3:

Определить внутренние силовые факторы, построить их эпюры и подобрать указанные типы сечений.

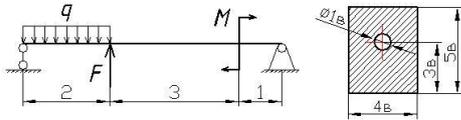
Таблица 3 – Варианты заданий

Численные значения							
№ Вар.	q, кН/м	F, кН	M, кНм	№ Вар.	q, кН/м	F, кН	M, кНм
1	20	40	15	17	30	40	25
2	30	35	20	18	40	35	30
3	40	30	25	19	20	30	15
4	20	25	30	20	30	25	20
5	30	40	15	21	40	40	25
6	40	35	20	22	20	35	30
7	20	30	25	23	30	30	35
8	30	25	30	24	40	25	40
9	40	30	35	25	20	30	15
10	20	25	40	26	30	25	20
11	30	40	15	27	40	40	25
12	40	35	20	28	20	35	30
13	20	30	25	29	30	30	35
14	30	25	30	30	40	25	40
15	40	30	35	31	20	40	35
16	20	35	40	32	30	45	20

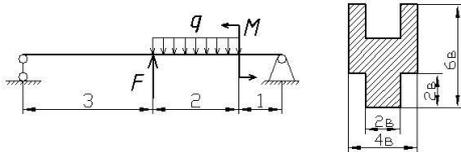
①



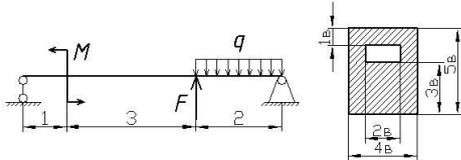
②



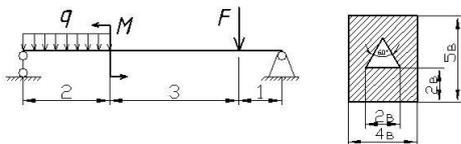
③



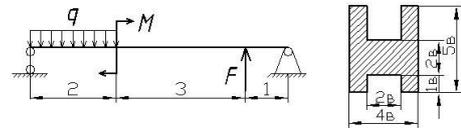
④



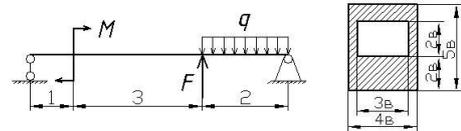
⑤



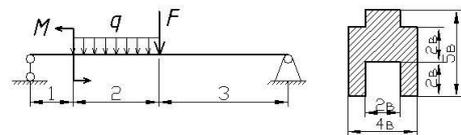
⑥



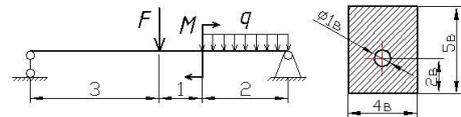
⑦



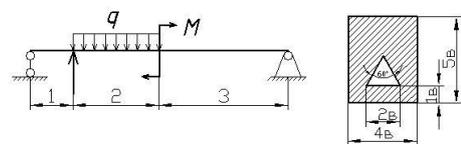
⑧

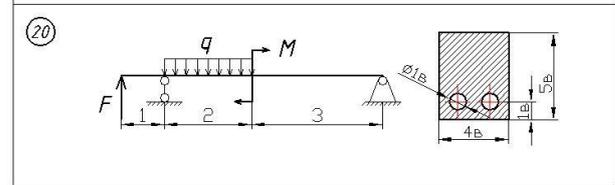
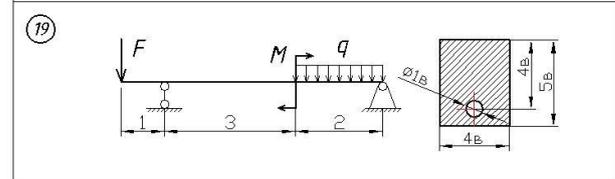
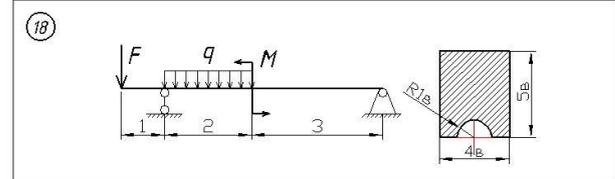
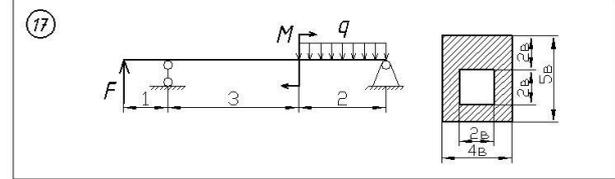
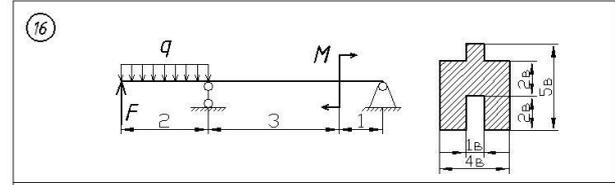
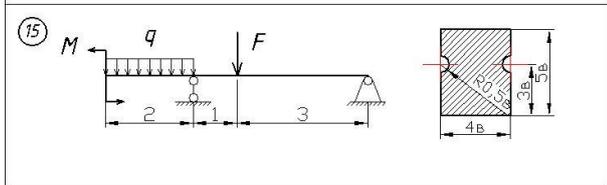
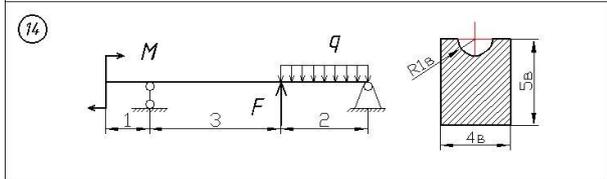
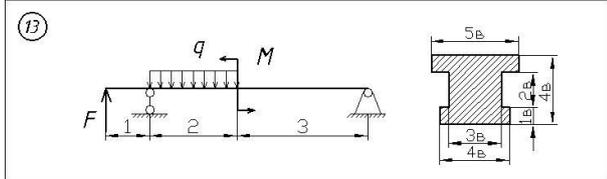
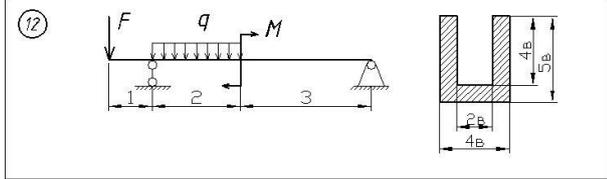
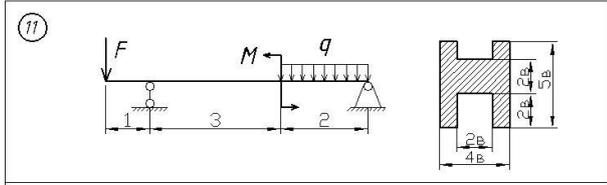


⑨

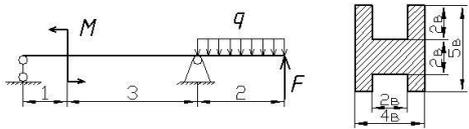


⑩

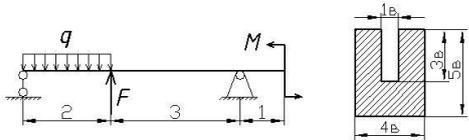




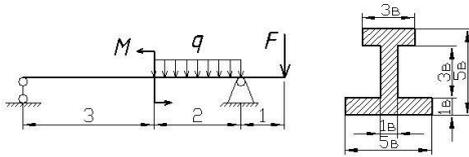
21



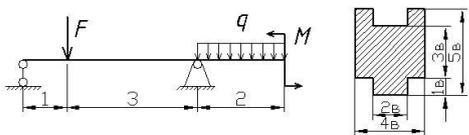
22



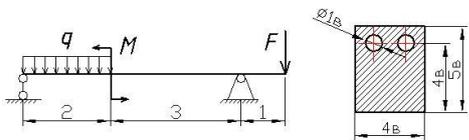
23



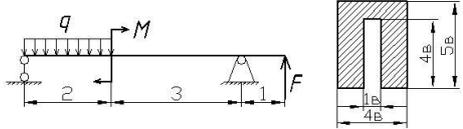
24



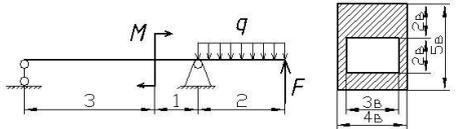
25



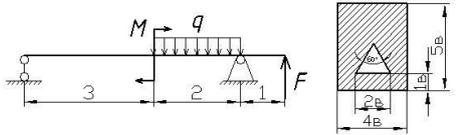
26



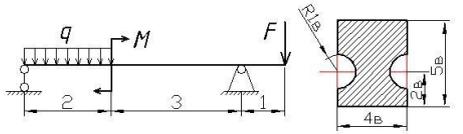
27



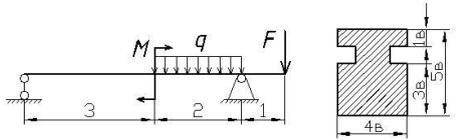
28

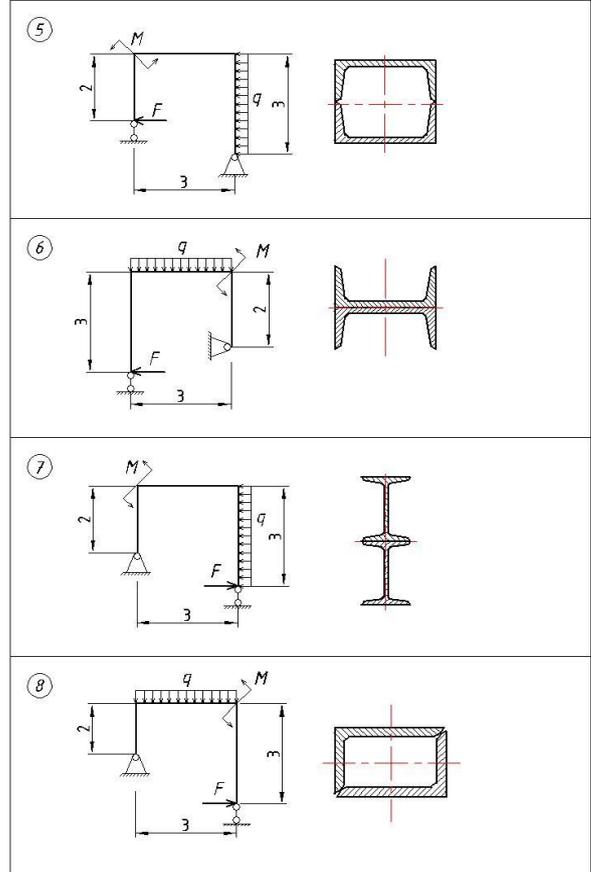
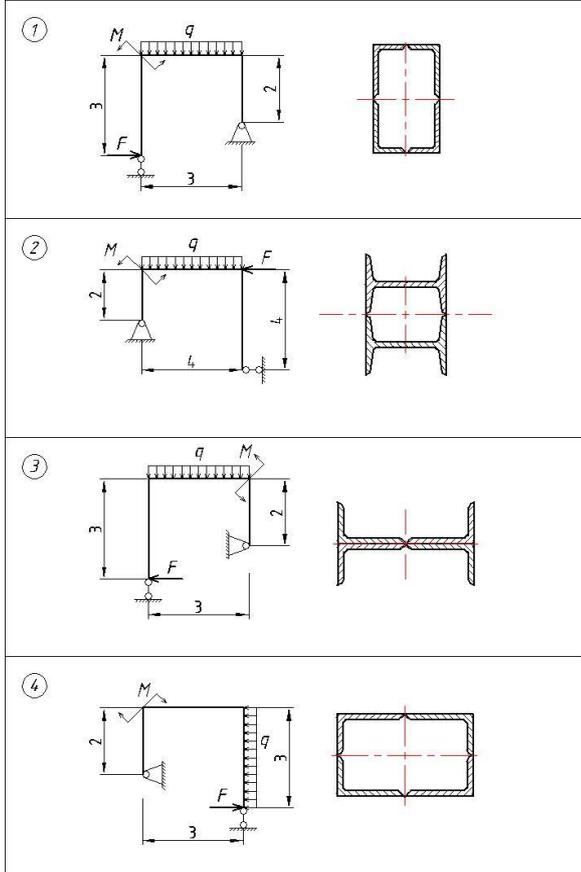


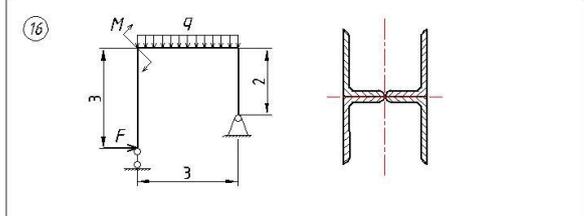
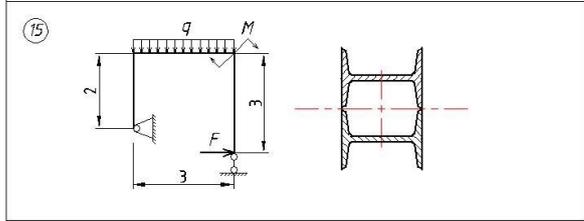
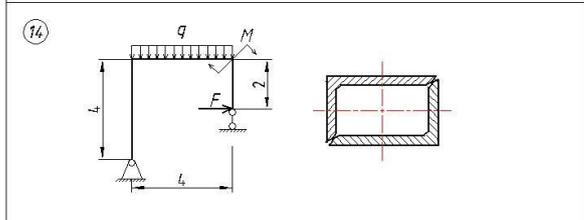
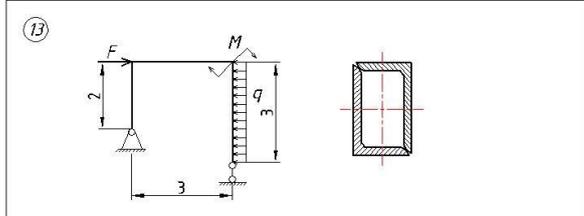
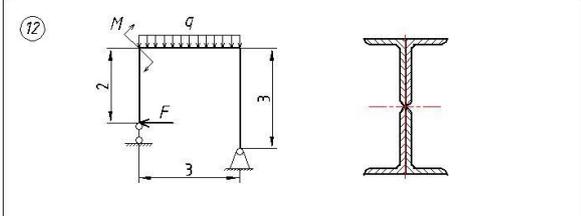
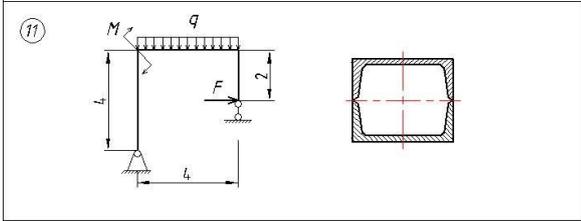
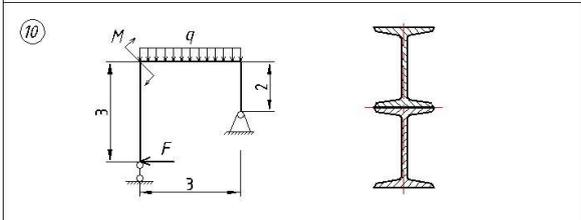
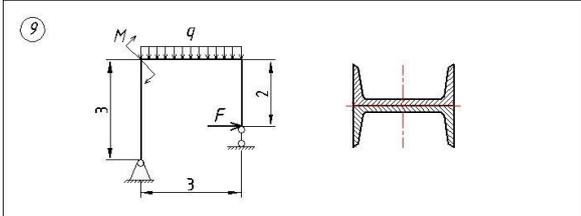
29



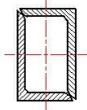
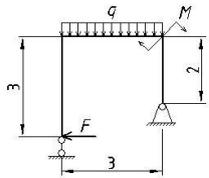
30



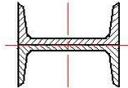
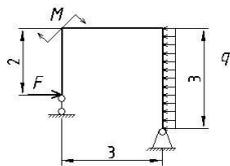




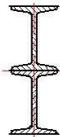
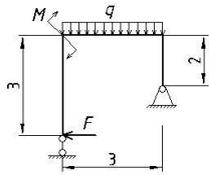
17



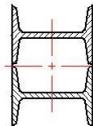
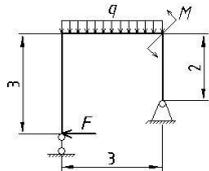
18



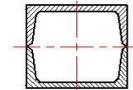
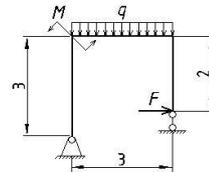
19



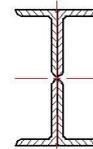
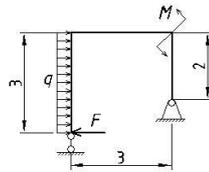
20



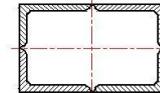
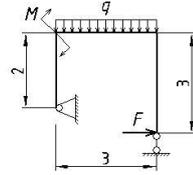
21



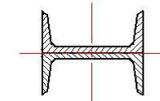
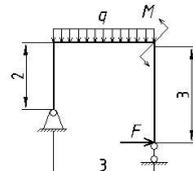
22



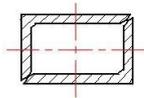
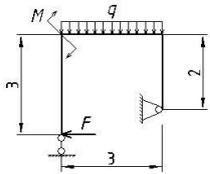
23



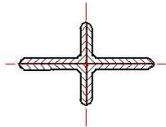
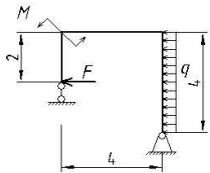
24



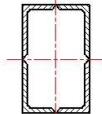
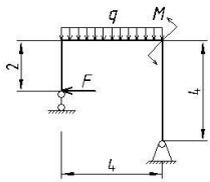
25



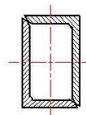
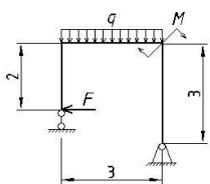
26



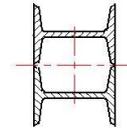
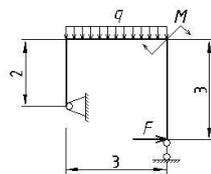
27



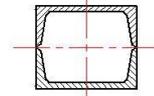
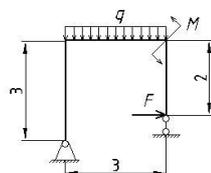
28



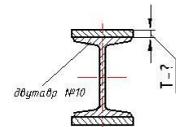
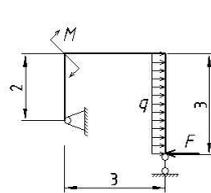
29



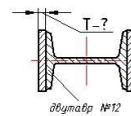
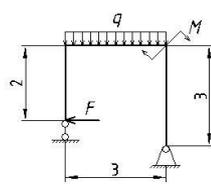
30



31



32



*Учебное издание*

Борисова Анастасия Дмитриевна  
Алексейцев Андрей Ильич

**Расчеты на прочность при различных  
видах деформации**

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Алтайский государственный технический университет  
им. И.И. Ползунова» 656038, г. Барнаул, пр-т Ленина, 46

[В начало](#)