УДК 536.46

ДЕФОРМАЦИЯ ПЛАМЕНИ

В.В. Замащиков

В работе получено обобщенное соотношение для определения деформации пламени. Рассмотрены частные случаи, когда пламя обладает сферической, цилиндрической симметрией и является бесконечной поверхностью. Полученные соотношения совпадают с приведенными в литературе уравнениями для частных случаев.

Ключевые слова: пламя, нормальная скорость пламени, искривление фронта горения, деформация пламени.

Ландау Л.Д. и Darrieus G. [1, 2] теоретически показали, что плоское пламя гидродинамически неустойчиво, то есть любые сколь угодно малые возмущений должны приводить к тому, что фронт пламени искривится. Для объяснения экспериментов, которые противоречили этому заключению, Маркштейн Дж.Г. [3] предположил, что нормальная скорость *Su* зависит от искривления фронта горения. Он заметил, что прогрев свежей смеси перед фронтом пламени и диффузия в эту область и из этой области частиц зависит от кривизны поверхности горения. Маркштейн Дж.Г. [3] предложил следующую зависимость нормальной скорость от радиуса кривизны:

$$Su = Su_0\left(1+\frac{L}{R_f}\right),$$

где L– характеристическая длина; R_f- радиус кривизны.

Карловицем (Karlovitz B.) с соавторами [4] было введено такое понятие как растяжение пламени (stretch rate) далее будем называть это явление деформацией пламени. Выражение для определения деформации было предложено Williams I.A. [5], оно имеет вид

$$\kappa = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt}.,$$

Здесь *A*– площадь небольшого элемента поверхности пламени; *t*– время; *k*- учитывает растяжении или сжатие плоского пламени.

Вычисление коэффициента *k.*

Buckmaster J.D. [6] вывел выражение для *k* в декартовой системе координат, а Matalon M. [7] получил инвариантную форму этого выражения. Strehlow R.A. и Savage L.D. [8] нашли вид соотношения, описывающее растяжение пламени, для четырех частных случаев. Найдем выражение для *k* в более общем виде, следуя выкладкам, приведенным в работе [9]. Зададим поверхность пламени, как и в работе [9], в векторной форме $\mathbf{r} = \mathbf{r}(p,q,t)$, где *p* и *q* параметры, $\mathbf{r}$ - радиус-вектор точки M(x,y,z) на поверхности пламени. Тогда имеем

$$d\mathbf{r}(p,q,t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}dp + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}dq + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}dt.$$

Будем следить за эволюцией во времени площади маленького элемента поверхности пламени *A*, имеющего параметры *p* и *q* в момент времени *t.* Площадь этого элемента в момент времени *t* можно представить, как площадь параллелограмма, образованного векторами $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}$, полученным при изменении *p*, когда постоянны *q* и *t*, и вектором $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}$, когда постоянны *p* и *t* [10]:

$$A(p,q,t) = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right| dpdq. \qquad (1)$$

Здесь $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}$- вектор, направленный по касательной к кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(p, q = const, t = const)$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}$- вектор, направленный по касательной к кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(p = const, q, t = const)$ Согласно [11], выражение для нормали $\mathbf{n}$ к поверхности имеет вид

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|}. \qquad (2)$$

Выбранный элемент поверхности пламени может перемешаться не только по нормали к поверхности, но и в других направлениях. В момент времени *t*+Δ*t* элемент поверхности будет иметь параметры *p*+Δ*p* и *q*+Δ*q*, а его радиус-вектор будет равен:

$$\mathbf{r}(p + \Delta p, q + \Delta q, t + \Delta t) = \\ = \mathbf{r}(p, q, t) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\frac{dp}{dt}\Delta t + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\frac{dq}{dt}\Delta t + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\Delta t \quad (3)$$

Производная по времени запишется как

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}. \quad (4)$$

Скорость перемещения выбранного элемента по нормали суть

$$v_n = \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}.$$

Представим вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ как сумму вектора направленного по нормали и лежащего в касательной плоскости к поверхности:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v_n} + \mathbf{V_t}$$

Единичные вектора, лежащие в касательной плоскости, можно определить следующим образом:

$$\mathbf{e_p} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\right|}.$$

$$\mathbf{e_q} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|}$$

С учетом этого уравнение (4) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{e_p} v_{tp} + \mathbf{e_q} v_{tq} + \mathbf{v_n} + \mathbf{V_t} \quad (5)$$

Здесь v_{tp} и v_{tq} есть выражения

$$v_{tp} = \dot{p}\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\right|$$

$$v_{tq} = \dot{q}\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|$$

Уравнение (5) можно переписать следующим образом

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v_t} + \mathbf{v_n}. \quad (6)$$

Очевидно, что вектора $\mathbf{v_t}$ и $\mathbf{v_n}$ взаимно перпендикулярны, поэтому $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v_t}) = 0$. Из определения следует, что нормальная составляющая скорости представляет собой скорость перемещения поверхности пламени вдоль ее нормали. То есть она определяется нормальной скорость пламени и нормальной составляющей скорости движения свежего газа, входящего во фронт пламени Тангенциальную составляющую будет определять как проекцию скорости движения свежего газа, входящего во фронт пламени, на касательную плоскость к поверхности пламени. Уравнение (3), с учетом (6), принимает вид

$$\mathbf{r}(p + \Delta p, q + \Delta q, t + \Delta t) = \mathbf{r}(p, q, t) + (\mathbf{v_t} + \mathbf{v_n})\Delta t.$$

Найдем производные:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}(p + \Delta p, q + \Delta q, t + \Delta t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}(p, q, t) + \left(\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial p}\right)\Delta t$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}(p + \Delta p, q + \Delta q, t + \Delta t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}(p, q, t) + \left(\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial q} + \frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial q}\right)\Delta t$$

Далее вычислим площадь, используя уравнение (1), запишем

$$A(p + \Delta p, q + \Delta q, t + \Delta t) \approx \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}(p, q, t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}(p, q, t) + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p} \times \left(\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial q} + \frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial q}\right) - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \times \left(\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial p}\right)\right]\Delta t\right| dpdq$$

Член пропорциональный Δt^2 не будем учитывать, так как при поиске предела

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(p + \Delta p, q + \Delta q, t + \Delta t) - A(p, q, t)}{\Delta t}$$

слагаемые, содержащие Δt^n, где $n>1$, стремятся к нулю. Разложим A по малому параметру. Обозначим:

$$\mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p} \times \left(\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial q} + \frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial q}\right) - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \times \left(\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial p}\right).$$

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}(p, q, t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}(p, q, t)$$

Тогда имеем

$$A(p + \Delta p, q + \Delta q, t + \Delta t) \approx |\mathbf{a} + \mathbf{b}\Delta t| dpdq = \\ = dpdq\sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{b}\Delta t)(\mathbf{a} + \mathbf{b}\Delta t)} = \\ = dpdq\sqrt{|\mathbf{a}|^2 + 2 \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\Delta t + |\mathbf{b}|^2 \Delta t^2} = \\ = dpdq|\mathbf{a}|\sqrt{1 + \frac{2 \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\Delta t}{|\mathbf{a}|^2} + \frac{|\mathbf{b}|^2 \Delta t^2}{|\mathbf{a}|^2}} \approx \\ \approx |\mathbf{a}| dpdq\left(1 + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\Delta t}{|\mathbf{a}|^2}\right)$$

Откуда, с учетом

$$A(p, q, t) = |\mathbf{a}| dpdq,$$

получим приближенное соотношение

$$A(p + \Delta p, q + \Delta q, t + \Delta t) \approx |\mathbf{a}| dpdq + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\Delta t}{|\mathbf{a}|} dpdq = \\ = A(p, q, t) + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\Delta t}{|\mathbf{a}|} dpdq$$

Далее, подставив выражения для $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, найдем формулу для коэффициента k и произведем дальнейшие преобразования:

$$\kappa = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\times\left(\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial q}+\frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial q}\right)-\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\times\left(\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial p}+\frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial p}\right)\right)\cdot \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right)}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|^2}.$$

Учтём выражение для нормали (2) и получим соотношение: (7)

$$\kappa = \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\times\left(\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial q}+\frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial q}\right)-\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\times\left(\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial p}+\frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial p}\right)\right)\cdot\mathbf{n}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|}.$$

Отметим, что (7) совпадает с уравнением, полученным в работе [9]. Как и в работе [9], нормальную составляющую скорости запишем в виде: $v_n = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$. Тогда получим:

$$\kappa = \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\times\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial q}-\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\times\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p}\right)\cdot\mathbf{n}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|}+\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\times\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q}-\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\times\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial p}\right)\cdot\mathbf{n}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|}.$$

При выводе этого уравнения использовалось соотношение $(\mathbf{n}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{n}=0$, где $\mathbf{c}$ - любой вектор. Таким образом, коэффициент деформации k представляет собой сумму двух слагаемых. Первое слагаемое обусловлено изменением тангенциальной составляющей скорости вдоль поверхности пламени. Второе слагаемой пропорционально нормальной составляющей скорости. Оно связано с производной от вектора n по параметрам p и q.

Если поверхность пламени не изменяется со временем, то второй член будет равен нулю, и тогда деформация пламени зависит только от первого слагаемого. Учтем выражение для нормали (2) и предположим, что $(\mathbf{e_p}\cdot\mathbf{e}_q)=0$ (касательные единичные вектора ортогональны). Тогда имеем:

$$\kappa = \frac{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\right|^2\left(\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial q}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right)+\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|^2\left(\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial p}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\right)}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|^2}+$$

$$+\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\right|^2\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right)+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|^2\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial p}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\right)}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|^2}$$

Так как $(\mathbf{e_p}\times\mathbf{e_q})=\mathbf{n}$, нетрудно показать, что $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\right|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|=\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|$. Тогда получим следующее окончательное выражение для коэффициента растяжения пламени: (8)

$$\kappa = \frac{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\right|\left(\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial q}\cdot\mathbf{e_q}\right)+\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|\left(\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial p}\cdot\mathbf{e_p}\right)}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\right|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|}+$$

$$+\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\right|\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q}\cdot\mathbf{e_q}\right)+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial p}\cdot\mathbf{e_p}\right)}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\right|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|}$$

Если положить, подобно [9], что $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\right|=1$, $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right|=1$, то найденное нами уравнение (8) полностью совпадет с уравнением, полученным в работах [9, 12].

Рассмотрение частных случаев

1. *Сферическая симметрия*

Сферическое пламя распространяется от центра или к центру. Параметры p и q – углы ($0\le p<2\pi$, $0\le q\le\pi$).

$$x = R\cdot\cos p\cdot\sin q;$$
$$y = R\cdot\sin p\cdot\sin q;$$
$$z = R\cdot\cos q$$
$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p}\right| = R\sin q;$$
$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right| = R;$$
$$\mathbf{e}_p = -\sin p\mathbf{i}+\cos p\mathbf{j};$$
$$\mathbf{e_q} = \cos p\cos q\mathbf{i}+\sin p\cos q\mathbf{j}-\sin q\mathbf{k}$$
$$\mathbf{n} = -\cos p\sin q\mathbf{i}-\sin p\sin q\mathbf{j}-\cos q\mathbf{k}$$

Получаем, что $\kappa = -\dfrac{2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})}{R}$.

2. *Цилиндрическая симметрия*

Рассмтрим пламя на бунзеновской горелке. В качестве параметров выберем $p=\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ и $q=\varphi$. Тогда имеем:

$$\mathbf{r}=\rho\cos\varphi\mathbf{i}+\rho\sin\varphi\mathbf{j}+z(\rho)\mathbf{k}.$$

Найдем единичные вектора:

$$\mathbf{e_p}=\frac{\cos\varphi\mathbf{i}+\sin\varphi\mathbf{j}+z'\mathbf{k}}{\sqrt{1+(z')^2}};$$

$$\mathbf{e_q}=-\sin\varphi\mathbf{i}+\cos\varphi\mathbf{j};$$

$$\mathbf{n}=\frac{-z'\cos\varphi\mathbf{i}-z'\sin\varphi\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+(z')^2}};$$

$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p}\right|=\sqrt{1+(z')^2};$$

$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q}\right|=\rho$$

$$z''=\frac{dz}{d\rho}$$

Пусть скорость газа имеет вид $\mathbf{u}=u(\rho)\mathbf{k}$, т.е. скорость газа направлена по оси z. $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})$ - есть скорость перемещения пламени по нормаль. Если фронт пламени не движется, то это скалярное произведение равно нулю. То есть имеем:

$$0=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})=Su-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n});$$

$$Su=\frac{u}{\sqrt{1+(z')^2}}=u\cos\alpha\,.$$

Где α- угол между нормалью и скоростью ***u***. Касательные составляющие скорость равны:

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_p)=\frac{z'u(\rho)}{\sqrt{1+(z')^2}};\quad .$$

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{e_q})=0$$

Таким образом, скорость перемещения элемента поверхности пламени равна:

$$\mathbf{v}=\frac{uz'}{\sqrt{1+(z')^2}}\mathbf{e_p}=$$

$$=\frac{uz'}{(1+(z')^2)}(\cos\varphi\mathbf{i}+\sin\varphi\mathbf{j}+z'\mathbf{k})=\mathbf{v_t}$$

При этом, как упоминалось выше, проекция этой скорости на нормаль равна нулю. Найдем выражение для растяжения пламени, используя уравнение (8). Для этого нужно найти производные от скорости:

$$\frac{\partial\mathbf{v_t}}{\partial q}=\frac{uz'}{1+(z')^2}(-\sin\varphi\mathbf{i}+\cos\varphi\mathbf{j});$$

$$\frac{\partial\mathbf{v_t}}{\partial p}=\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{uz'}{1+(z')^2}\right)(\cos\varphi\mathbf{i}+\sin\varphi\mathbf{j}+z'\mathbf{k})+\frac{uz'z''}{1+(z')^2}\mathbf{k};$$

$$\frac{\partial\mathbf{v_t}}{\partial p}=\frac{1}{\sqrt{1+(z')^2}}\left[u'z'+\frac{uz''(1-(z')^2)}{(1+(z')^2)}\right]\mathbf{e_p}+\frac{uz'z''}{1+(z')^2}\mathbf{k};$$

Подставим, полученные выражения для производных, в уравнение (8) и получим:

$$k=\frac{Su}{\rho}\sin\alpha+u'\sin\alpha\cos\alpha+\frac{Su}{R};$$

$$\frac{1}{R}=\frac{z''}{\left[1+(z')^2\right]^{3/2}};$$

$$\frac{1}{R_1}=\frac{\sin\alpha}{\rho};$$

$$\sin\alpha=\frac{z'}{\sqrt{1+(z')^2}}$$

Здесь R, R_1- радиусы кривизны. Сравним, полученное выражение, с выражением, приведенным в работе [8]. Для этого, как и в работе [8], будем считать, что нормальная скорость *Su* постоянная вдоль фронта пламени. Это позволяет найти производную *u*'. Конечное выражение имеет вид

$$\kappa=Su\left(\frac{\sec^2\alpha}{R}+\frac{\sin\alpha}{\rho}\right);\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},$$

совпадающий с выражением, полученным в работе [8].

3. *Плоское пламя*

Фронт пламени представляет собой бесконечную поверхность. Скорость газа направлена по оси *y* и зависит только от координаты *x*. Этот случай рассматривается в работе [8]. Зададим поверхность и скорость пламени следующим образом:

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y(x)\mathbf{j}+z\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{u}=u(x)\mathbf{j}.$$

Для нахождения деформации пламени воспользуемся уравнением (8). Пусть параметры $p=x$ и $q=z$. Тогда имеем:

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p}=\mathbf{i}+y'\mathbf{j};$$

$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial p}\right|=\sqrt{1+y'^2};$$

$$\mathbf{e_p}=\frac{\mathbf{i}+y'\mathbf{j}}{\sqrt{1+y'^2}};$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} = \mathbf{k};$$

$$\mathbf{e_q} = \mathbf{k};$$

$$\mathbf{n} = \frac{y'\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Найдем скорость перемещения фронта пламени:

$$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}) - Su = \mathbf{v_n} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) = 0;$$

$$\mathbf{v_t} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e_p})\mathbf{e_p} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e_q})\mathbf{e_q} = \frac{uy'}{\sqrt{1+y'^2}}\mathbf{e_p}$$

Далее найдем производные от скорости:

$$\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial p} = \left[\frac{u'y'}{1+y'^2} + \frac{uy''(1-y'^2)}{(1+y'^2)^2}\right](\mathbf{i} + y'\mathbf{j}) + \frac{uy'y''}{1+y'^2}\mathbf{j};$$

$$\frac{\partial \mathbf{v_t}}{\partial q} = 0.$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}; u' = \frac{du}{dx}.$$

Найдем выражение для коэффициента деформации пламени:

$$\kappa = \frac{u'y'}{1+y'^2} + \frac{uy''}{(1+y'^2)^2}. \qquad (9)$$

Если воспользоваться связью между скоростью газа и нормальной скоростью, то можно получить

$$\kappa = \frac{Su\cdot u'\cdot\sin\alpha}{u} - \frac{Su}{R}.$$

Здесь α– угол между нормалью к плоскости и вектором скорости. Видно, что, если кривизна равна нулю ($R \to \infty$), т.е. пламя плоское, растяжение может быть отличным от нуля.

Пока мы не накладывали каких-либо условий на нормальную скорость. Чтобы полученное выражение (9) можно было сравнить с результатом, приведенным в работе [8], примем, что

$$Su = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}) = -\frac{u}{\sqrt{1+y'^2}} = u\cos\alpha = const.$$

Для этого случая нетрудно получить:

$$\kappa = -\frac{Su}{R\cos^2\alpha}; R = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

ВЫВОДЫ

Это выражение совпадает с выражением, полученным в [8], что подтверждает справедливость предложенного в настоящей работе подхода для определения деформации пламени в различных конкретных условиях, например, закрытых сосудах сложной геометрии, вентилируемых системах и двигателях внутреннего сгорания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д. К теории медленного горения // ЖЭТФ, 1944.- Т. 14, N 6.- С. 240-244.
2. Darrieus, G. Unpublished work presented at La Technique Moderne, and at Le Congrès de Mécanique Appliquée (1945) and (1938).
3. Нестационарное распространение пламени / Под редакцией Дж. Г. Маркштейна.- М.: Изд-во «Мир», 1968.- С. 36.
4. Karlovitz, B., Denniston, D.W., Knapschaefer, D.H., and Well, F.E. // Fourth Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, 1953.- P. 613.
5. Williams, I.A. // AGARD Conference Proceedings.- No. 164, AGARD, Paris, 1975.
6. Buckmaster, J.D. // Acta Astonautica 6:741-769 (1979).
7. Matalon, M. // Combust. Sci. Tech. 31:168-181 (1983).
8. Strehlow, R.A., and Savage, L.D. // Combust. Flame 31:209-211 (1978).
9. Chung, S.H., and Law C.K. // Combust. Flame 55:123-125 (1984).
10. Лаптев, Г.Ф. Элементы векторного исчисления.- М.: Изд-во «Наука», 1975.- 180 с.
11. Бронштейн, И.Н., Семендяев К. А. Справочник по математике.- М.: Изд-во «Наука», 1980.- 734 с.
12. Chung, K.Law // Combustion physics, Princeton University, Cambridge University press.- 2006.- P. 722.

Замащиков В. В., *к.ф.-м.н.,*
Институт химической кинетики и горения СО РАН, Новосибирск,
тел. (383)3332296, e-mail: albor@kinetics.nsc.ru