

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЧАСТОТНОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБЛАСТЯХ

С.П. Пронин, Д.Ю. Наталенко

Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова  
г. Барнаул

Процессы пространственных колебаний занимают важное место в различных областях человеческой деятельности: науке, технике, промышленности, строительстве.

**Цель настоящей работы** – теоретически и экспериментально исследовать процесс пространственных колебаний тест-объекта с помощью компьютеризированной системы.

В основу теоретических исследований положен спектральный анализ. Экспериментальные исследования выполняли с применением видеокамеры и персонального компьютера. В качестве тест-объекта использовали пирамидальную миру с коэффициентом заполнения  $K=0,75$ , вид которой представлен на рисунке 1, а обработку оптического сигнала производили с помощью разработанной специализированной программы.



Рисунок 1 – Изображение пирамидальной миры в статическом положении

При пространственных колебаниях происходит скоростной сдвиг (смаз) изображения. Известно, что в случае прямолинейного движения искажение изображения выражают в пространственной области функцией рассеяния в виде прямоугольного импульса  $s(x) = \text{rect}(x/b)$  [1]:

$$\text{rect}(x/b) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in |b/2| \\ 1 & \text{при } x \notin |b/2| \end{cases}, \quad (1)$$

где  $b$  – размер прямоугольного импульса, или в частной области передаточной функцией [2]:

$$H(\nu) = b \cdot \frac{\sin(\pi b \nu)}{(\pi b \nu)}, \quad (2)$$

где  $\nu$  – пространственная частота, связанная с размером  $b$  обратно пропорциональной зависимостью:  $\nu = 1/b$ .

Функция (2) является Фурье-преобразованием от функции (1).

Примем идею скоростного сдвига за основу описания процесса колебаний тест-объекта и свяжем амплитуду пространствен-

ного колебания с размером прямоугольного импульса  $b$ . С точки зрения размытия изображения смаз и дефокусировка тождественные процедуры. Свойства дефокусированного изображения радиальной миры описал О' Нейл с помощью функции Бесселя [3, 4]. Эта функция в качественном отношении равносильна функции (2). С повышением пространственной частоты  $\nu$  она переходит через нуль и приобретает отрицательные значения. Далее снова переходит через нуль и приобретает положительные значения и т.д. Физический смысл передаточной функций (2)  $H(\nu)$  состоит в следующем.

Когда штриховая мира находится в покое  $b = 0$ , все ее штрихи имеют разрешение. То есть между темными штрихами наблюдаются светлые промежутки (см. рис.1). При амплитуде колебаний  $b > 0$  возможны следующие варианты. В диапазоне частот от  $\nu = 0$  до  $\nu \leq 1/b$  функция  $H(\nu)$  принимает положительные значения, что означает разрешение части штрихов. На рисунке 2 под номерами 1 и 2 представлены два таких штриха. При амплитуде колебаний  $\nu = 1/b$  функция (2) равна нулю, что означает слияние двух штрихов и светлого промежутка в один цельный объект. В этом случае можно сказать, что изображение штрихов на данной пространственной частоте имеет нулевой контраст. На рис.2 такой объект изображен под номером 3. В диапазоне частот от  $\nu = 1/b$  до  $\nu = 2/b$  передаточная функция приобретает отрицательные значения. Согласно теории О' Нейла мы должны иметь ложное разрешение. Происходит инверсия изображения. Между двух светлых штрихов появляется темный промежуток. Этот факт отражен на рисунке 2 штрихами под номером 4. При пространственной частоте  $\nu = 2/b$  функция  $H(\nu)$  приобретает значение нуля, что характеризует отсутствие нулевого контраста в следующей паре штрихов. Эта пара на рисунке 2 обозначена номером 5.

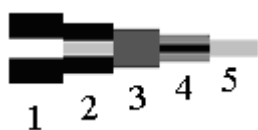


Рисунок 2 – Теоретическое изменение контраста в изображении пирамидальной миры при некоторой амплитуде колебаний  $b$

Рассмотрим количественную оценку в данном теоретическом вопросе. Парные штрихи с любой пространственной частотой в пирамидальной мире можно представить функцией  $f(x)$  в виде свертки двух дельта-функций, расположенных на расстоянии  $A$  друг от друга и сдвинутых относительно нуля на  $\pm A/2$ :

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \{ \delta(x - A/2) + \delta(x + A/2) \} \quad (3)$$

с функцией прямоугольного импульса, размер  $a$  которого равен размеру светлого штриха:

$$rect(x/a) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in |a/2| \\ 1 & \text{при } x \notin |a/2| \end{cases} \quad (4)$$

В итоге функция  $f(x)$  двух штрихов будет иметь вид:

$$f(x) = f_1(x) * rect(x/a), \quad (5)$$

где знак (\*) означает операцию свертки.

Пространственные колебания учитываются путем введения функции (1) в уравнение (5):

$$f(x) = f_1(x) * rect(x/a) * rect(x/b). \quad (6)$$

Известно, что спектр двух  $\delta$ -функций (3) в частотной области определяется функцией косинуса, а Фурье-преобразования двух других функций в уравнении (6) аналогичны функции (2). Применяя теорему Бореля, перейдем из пространственной области в частотную:

$$F(\nu) = \cos(\pi A \nu) \cdot \frac{\sin(\pi a \nu)}{\pi a \nu} \cdot \frac{\sin(\pi b \nu)}{\pi b \nu}. \quad (7)$$

Следует отметить, что в уравнении (7) опущено произведение  $a \cdot b$ . Эти коэффициенты существенно не влияют на решение рассматриваемого вопроса. Можно считать, что функция  $F(\nu)$  просто нормирована к единице.

Очень неудобно анализировать уравнение (7) с различными размерами, поэтому выразим размеры  $a, b$  через расстояние  $A$  между центрами штрихов:

$$a = K \cdot A, \quad b = n \cdot A. \quad (8)$$

Коэффициент  $K$  в оптике называют коэффициентом заполнения. Величину обрат-

ную  $K$  в электронике называют скважностью. Этот коэффициент лежит в пределах  $0 < K < 1$ . Значение коэффициента  $b$  может принимать любое положительное число. Тогда уравнение (7) переписывается в виде:

$$F(\nu) = \cos(\pi A \nu) \cdot \frac{\sin(\pi K A \nu)}{\pi K A \nu} \cdot \frac{\sin(\pi n A \nu)}{\pi n A \nu} \quad (9)$$

Для проверки изложенной теории был выбран признак получения нулевого контраста в изображении пирамидальной миры. Нулевой контраст определяется аргументом передаточной функции, которая по порядку стоит третьей в уравнении (9). Анализируя аргумент, приходим к выводу: нулевой контраст возникает при условии, когда амплитуда колебания становится равной расстоянию между центрами прямоугольных штрихов.

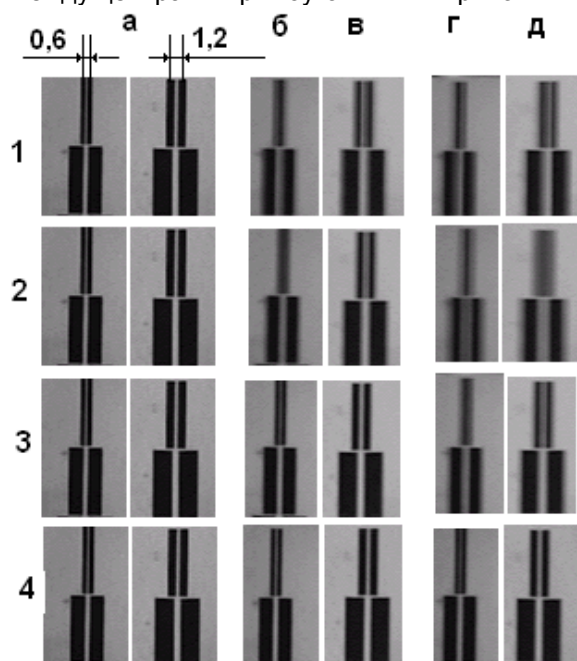


Рисунок 3 – Результат экспериментальных исследований

На рисунке 3 приведен результат экспериментальных исследований. В колонке (а) по всем рядам: 1, 2, 3, 4, – представлены статические изображения. Расстояния между исследуемыми штрихами в мм указаны на рисунке 3. В колонках б, в – изображения при амплитуде колебания 0,6 мм. В колонке г, д – изображения при амплитуде колебания 1,2 мм. Ряд б, в, г, д соответствует частоте колебания пирамидальной миры 25 Гц, ряд 2 б, в, г, д – частоте 50 Гц, ряд 3 б, в, г, д – 75 Гц, ряд 4 б, в, г, д – 100 Гц.

Как видно из изображений, на частоте колебаний пирамидальной миры 25 Гц теория и эксперимент совпадают для изображения 1б.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА КОЛЕБАНИЙ В ЧАСТОТНОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБЛАСТЯХ

Амплитуда колебаний  $b=0,6$  мм равна расстоянию  $A=0,6$  мм между центрами штрихов. При амплитуде колебания  $b=1,2$  мм такого совпадения нет. Штрихи с расстоянием  $A=1,2$  мм имеют явное разрешение (рис.3, 1д). Для всех изображений был выполнен не только визуальный, но и компьютерный анализ изменения сигнала между штрихов.

На частоте 50 Гц имеет полное совпадение теории и эксперимента. Нулевой контраст наблюдается на рисунке 3 – 2б и 2д. В изображении возникает ложное разрешение.

На частоте 75 Гц теория и эксперимент в рассматриваемых изображениях совпадают частично. Сигнал между штрихами значительно уменьшается, но нулевого контраста не возникает. Нулевой контраст наблюдается на рис. 3 – 3г. Амплитуда колебаний  $b = 1,2$  мм, а расстояние  $A=0,6$  мм, следовательно, величина  $n = 2$ . В соответствии с формулой (9) передаточная функция обращается в нуль, что теоретически свидетельствует о возникновении нулевого контраста.

На частоте 100 Гц имеем во всех штрихах разрешение, но уровень сигнала между штрихов в 1,5 – 2 раза меньше уровня сигнала по сравнению со статическими изображениями.

### Выводы.

Математическая модель дает возможность сопоставить результаты теории и эксперимента. На отдельных частотах пространственных колебаний она точно предсказывает возникновение нулевого контраста. Однако в ней отсутствует частота пространственных

колебаний и частота кадров, что, безусловно, требует ее доработки.

При условии возникновения нулевого контраста уравнение (9) упрощается:

$$F(\nu) = \cos(\pi A \nu) \cdot \frac{\sin(\pi K A \nu)}{\pi K A \nu}, \quad (10)$$

поскольку  $n = 1, 2, 3, \dots$  и третий множитель становится равным единице.

Как показало компьютерное моделирование, спектральный состав функции  $F(\nu)$  практически совпадает со спектром функции прямоугольного импульса, размер которого в два раза превышает расстояние между штрихами. При этом коэффициент заполнения  $K$  должен быть меньше значения 0,5. Следовательно, можно предположить, что нулевой контраст в изображениях пирамидальной микры с меньшим коэффициентом заполнения будут точнее описываться передаточной функцией  $\frac{\sin(\pi A \nu)}{\pi A \nu}$ .

### Список литературы

1. Обработка изображений и цифровая фильтрация / под ред. Т. Хуанга. – М.: Мир, 1979. – 318 с.
2. Василенко Г.И. Восстановление изображений. / Г.И. Василенко, А.М. Тараторин. – М.: Радио и связь, 1986. – 304 с.
3. О' Нейл Э. Введение в статистическую оптику. / Пер. с англ / О' Нейл Э. – М.: Мир, 1966. – 254 с.
4. Пронин С.П. Оценка качества информационно-измерительной оптико-электронной системы / С.П. Пронин. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2001. – 125 с.