КУСОЧНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПОЛИГОНА И КУМУЛЕНТЫ ДАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЛИН ВЫПУЩЕННОЙ ПРОДУКЦИИ

Г.А. Абденова, А.С. Мальцев

Управление качеством продукции диктуется потребностями рыночной экономики, в условиях которой успешная деятельность предприятий основывается на конкурентоспособности выпускаемой продукции, т.е. способности занять и удержать позицию на конкретном рынке в рассматриваемый период при конкуренции с другими товарами аналогичного назначения.

Конкурентоспособность во многом зависит от технического уровня и качества продукции, которые обеспечиваются путем внедрения систем качества. В настоящее время вопросы обеспечения качества должны решаться в условиях, имеющих следующие характерные черты:

- растет сложность современных технических устройств и оборудования;
- создаются сложные системы машин и оборудования, объединенные в единые автоматизированные комплексы;
- растет номенклатура применяемых веществ и материалов, что связано, с одной стороны, с возрастанием требований к конечной продукции (например, повышение требования к точности размеров детали), с другой стороны, с достижениями химической промышленности в получении новых материалов;
- растет номенклатура оборудования (например, более совершенные станки, а также современные технологии для обработки деталей), применяемого в различных отраслях народного хозяйства, что обусловлено внедрением новых технологий;
- усложняются связи в процессе производства, что обусловлено специализацией производств.

В соответствии со стандартом Международной организации по стандартам (ISO) ИСО 8402 "Качество. Словарь" качество – это совокупность свойств и характеристик продукции или услуги, которые придают им способность удовлетворять обусловленные или предложенные потребности.

Показатель качества продукции – это количественная характеристика одного или нескольких свойств продукции, составляющих ее качество.

Единичный показатель качества продукции – показатель качества продукции, характеризующий одно из ее свойств (например, точность длины обработанной детали на станке).

Комплексный показатель качества продукции – показатель качества продукции, характеризующий несколько ее свойств.

По характеризующим свойствам единичные показатели объединяются в группы:

- показатели назначения, характеризующие полезный эффект от использования продукции по назначению (например, грузоподъемность автомобиля);
- показатели экономического использования ресурсов – показатели, характеризующие расход материальных ресурсов при изготовлении и эксплуатации продукции (например, вес детали, расход топлива на единицу полезного действия);
- эргономические показатели – показатели, характеризующие качество продукции с точки зрения приспособленности ее к эксплуатации (использованию) человеком;
- показатели технологичности характеризуют удельные затраты на изготовление единицы продукции (например, удельная трудоемкость изготовления, удельная энергоемкость);
- показатели безопасности продукции характеризуют безопасность обслуживающего персонала и сопрягаемых объектов при эксплуатации или потреблении;
- показатели унификации характеризуют частоту повторяемости и применяемости деталей и сборочных единиц;
- патентно-правовые показатели характеризуют патентную защиту и частоту;
- показатель надежности - это свойство объектов сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, в том числе технического обслуживания, ремонта, хранения, транспортирования и т. п. К числу комплексных показателей надежности относятся коэффициент готовности, коэффициент оперативной готовности.

Показатели качества вносятся в техническое задание (ТЗ). При этом определяются их количественные значения как компромисс между требованиями потребителя и возможности разработчика и изготовителя. Изготовитель обязан обеспечить соответствующие показатели качества тем требованиям, которые зафиксированы в технических условиях.

Одним из существенных показателей качества продукции являются размеры продукции (например, длина детали). Если детали изготавливаются и отправляются в пункт назначения большими партиями, то для оперативности необходимо точность размеров определять на основе проверки размеров деталей в выборочной партии изделий. При этом значения размеров должны удовлетворять определенным стандартам (например, плотности распределения значений длин удовлетворять некоторой эталонной плотности распределения).

В данной работе, предлагается одна методика построения кусочно-дифференциальной модели, описывающая плотность распределения значений длин измеренных деталей.

В ходе контроля качества продукции получены частоты {1, 6, 11, 15, 9, 6, 2} попадания длин элементов из выборочной партии в контрольные интервалы. Гистограмма частот представлена на рисунке 1.

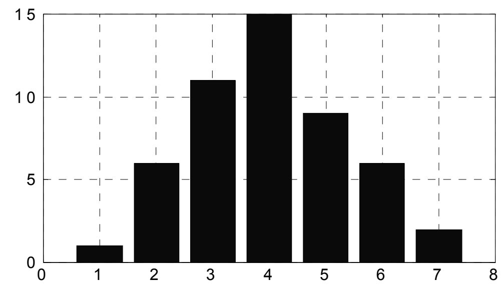

Рисунок 1 – Гистограмма частот попадания

Для контроля качества продукции (оценки плотности распределения) строиться непрерывная модель в форме дифференциальных уравнений в пространстве состояний вида [1]:

$$\dot{x} = a_i x + b_i,$$
$$x(0) = x_0, \qquad (1)$$
$$y_k = x_k + e_k.$$

где необходимо оценить неизвестные параметры a_i и b_i модели, x – вектор состояния, y_k - выход измерительной системы, e_k - случайная погрешность k-го измерения (предполагается e_k имеет нормальное распределение и нулевое математическое ожидание), x_0 – вектор начального состояния, $i=\overline{1,M}$, M – число подынтервалов разбиения.

Интервал наблюдения разбивается на два подынтервала [1, 4] и [4, 7], где граница наблюдения определяется существенным изменением поведения процесса. На каждом интервале вычисляются значения параметров a_i и b_i и строится математическая модель вида (1).

Вводятся обозначения:

$$Y = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_N & 1 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix}.$$

Тогда соотношение (1) можно записать в виде

$$Y = X \cdot Q. \qquad (2)$$

Соотношение (2) представляет собой регрессионную модель. Для нахождения значений параметров a_i и b_i, $i=\overline{1,2}$ используется стандартное соотношение метода наименьших квадратов [2]:

$$\hat{Q} = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

В качестве первого столбца матрицы X берется столбец данных наблюдения. Вектор Y получается путем численного нахождения производных. Для этого данные наблюдения y_i, $i=\overline{1,N}$ аппроксимируются с помощью регуляризирующего кубического сплайна S и получается временной ряд с уровнями $\{\tilde{y}\}$. Тогда с учетом $x_i = \tilde{y}_i$, $i=\overline{1,N}$ значения производных $\dot{x}(t)$ вычисляются по формуле

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t_{j+1}) - x(t_j)}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{6}\left[\left(2 - 6z + 3z^2\right)M_j + \left(1 - 3z^2\right)M_{j+1}\right],$$

где $t=[t_j, t_{j+1}]$, $z=(t-t_j)/\Delta t$, $M_j = \ddot{S}(t_j)$ получаем в процессе построения $S(t)$, $j=\overline{1,N}$, t – аргумент непрерывной модели.

Найденные значения параметров на интервале [1, 4]: $\{a_1 = -0.0514, \quad b_1 = 5.0795\}$ и на интервале: [4, 7] $\{a_2 = -0.2076, \; b_2 = -2.7662\}$.

Результаты вычислений по полученной кусочно-дифференциальной модели показаны на рисунке 2.

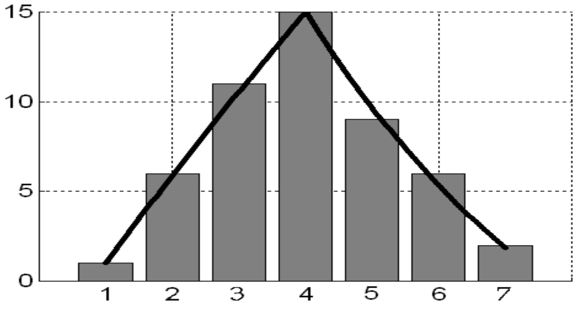

Рисунок 2 – Кусочно-дифференциальная модель и данные контроля

Для набора накопленных частот: {1, 7, 18, 33, 42, 48, 50}, гистограмма которых представлена на рисунке 3, по описанной выше процедуре вычислены параметры дифференциальной модели для интервала [1,7]: {*a*= -0.0904, *b*=10.5807}.

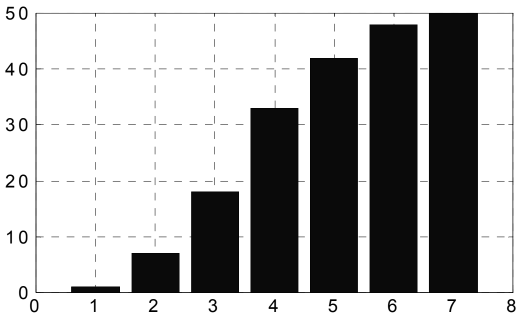

Рисунок 3 – Накопленные частоты

На рисунке 4 представлены данные накопленных частот и полученная дифференциальная модель. Как видно, модель не обладает достаточной точностью.

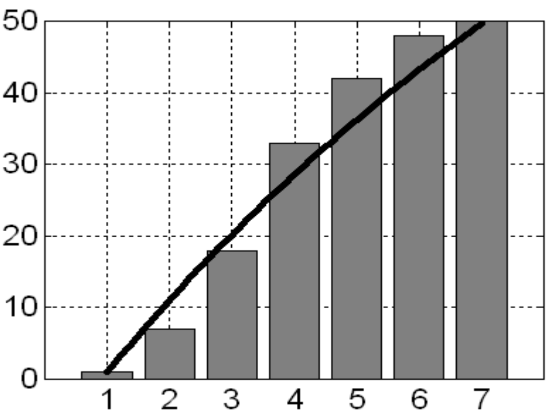

Рисунок 4 – Данные накопленных частот и дифференциальная модель

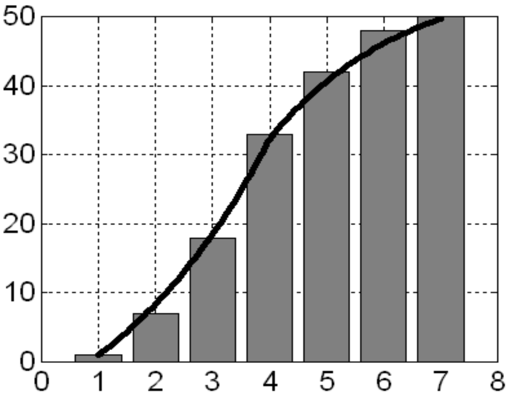

Рисунок 5 – Данные накопленных частот и кусочно-дифференциальная модель

С целью повышения качества модели интервал наблюдения разбивается на два подынтервала [1, 4] и [4, 7]. На каждом подынтервале строиться своя дифференциальная модель. Вычисленные параметры моделей для интервалов равны {a_1=0.3105, b_1=6.0034} и {a_2=-0.4213, b_2=23.8043} соответственно. Полученная кусочно-дифференциальная модель представлена на рисунке 5. Уменьшение погрешности модели на двух интервалах может быть показано вычислением значений среднеквадратичных отклонений исходных данных от результатов моделей, которое для случая модели на всем интервале равно 3.4903, для кусочно - дифференциальной модели равно 1.0314.

Так как в реальности частота попадания длины изделий из выборочной партии в контрольные интервалы имеет элемент случайности, исследуем качество получаемых моделей при некоторой случайности в распределении этих частот. Для этого параметры полученной модели частот попадания принимаются за идеальные: на интервале [1, 4] $\{a_1 = -0.0514, \quad b_1 = 5.0795\}$ и на интервале [4, 7] $\{a_2 = -0.2076, \quad b_2 = -2.7662\}$. На результаты моделирования накладывается шум с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и дисперсией равной 1:

$$\dot{x} = a_i x + b_i, i = \overline{1,2}$$

$$y_k = x_k + e_k, e \sim N(0,1).$$

Исследуется влияние размера числа контрольных интервалов на точность оценивания параметров кусочно-дифференциальной модели.

Для разного числа контрольных интервалов на [1, 4] и [4, 7] по описанной выше процедуре вычисляются оценки значений параметров $\hat{a}_i$ и $\hat{b}_i$, $i=\overline{1,2}$. В таблице 1 представлены полученные результаты оценивания.

Таблица 1 – Зависимость оценок параметров модели от числа контрольных интервалов

Число интервалов	$\hat{a}_1$	$\hat{b}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{b}_2$
20	-0.1673	5.8226	-0.1283	-3.8111
40	-0.0309	4.8423	-0.2676	-3.1818
60	-0.0575	4.9782	-0.1681	-2.8853
100	-0.0448	5.1107	-0.1983	-2.7906

Таблица 2 – Зависимость относительных погрешностей оценивания параметров от числа контрольных интервалов

Число интервалов	δ_{a1}	δ_{b1}	δ_{a2}	δ_{b2}
20	2.2549	0.1463	0.3820	0.3820
40	0.3988	.0467	0.2890	0.2890
60	0.1187	0.0199	0.1903	0.1903
100	0.1284	0.0061	.0448	0.0448

Для исследования влияния числа контрольных интервалов *n* на качество оценивания параметров кусочно-дифференциальной модели находятся относительные ошибки (таблица 2) оценивания каждого параметра:

$$\delta_{ai}(n)=\left|\frac{\hat{a}_i-a_i}{a_i}\right|,\ \delta_{bi}(n)=\left|\frac{\hat{b}_i-b_i}{b_i}\right|,\ i=\overline{1,2}\ .(3)$$

На рисунке 6 изображены данные, полученные по эталонной модели, гистограмма зашумленных данных и вычисленные значения кусочно-дифференциальной модели для 20 контрольных интервалов. Как видно, даже при малом числе интервалов модель обладает не большой погрешностью. При дальнейшем увеличении числа интервалов погрешность оценивания параметров значительно уменьшается.

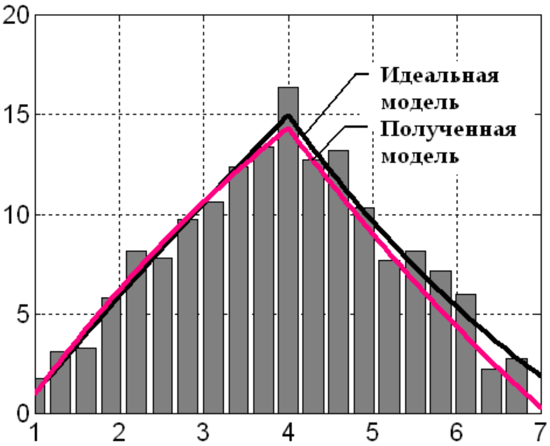

Рисунок 6 – Гистограмма зашумленных частот, данные по идеальной и полученной модели

Найденные оценки параметров кусочно-дифференциальной модели для накопленных зашумленных частот приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Зависимость оценок параметров модели от размера выборки

Число интервалов	$\hat{a}_1$	$\hat{b}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{b}_2$
20	0.4491	3.9082	-0.5117	28.0926
40	0.3711	4.2622	-0.4553	28.7087
60	0.4654	3.3494	-0.4677	29.1890
100	0.5652	2.7196	-0.5564	33.4717

На рисунке 7 представлена гистограмма накопленных частот и результаты моделирования для 20 контрольных интервалов.

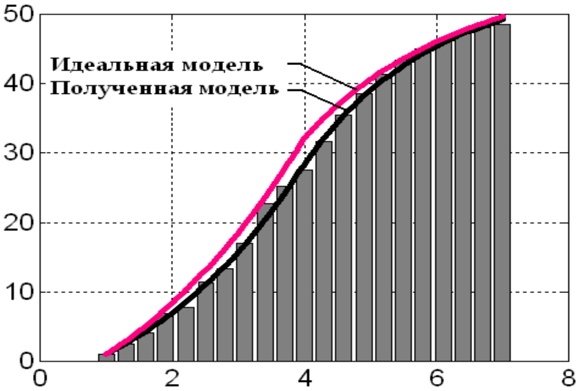

Рисунок 7 – Гистограмма накопленных частот, результаты полученной и идеальной модели

В результате с использованием алгоритма регуляризирующего сплайна, метода наименьших квадратов и разбиения интервала наблюдения на подынтервалы были оценены параметры кусочно-дифференциальной модели для частот появления элементов определенных длин и набора накопленных частот, а также исследовано влияние размера выборки на качество оценивания параметров модели. Полученные кусочно-дифференциальные модели достаточно хорошо описывают результаты контроля, в том числе и при наличии случайных составляющих в распределении частот.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975.
2. Абденов А.Ж., Снисаренко А.В., Трошина Г.В. Описание динамических процессов с помощью кусочно-дифференциальной модели. Сборник научных трудов НГТУ. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – № 1(27). – С.3-12.