РАЗДЕЛ 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ В ИНФОРМАЦИОННЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

УДК: 622.1:528.022.61

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРЁХОСЕВОГО АКСЕЛЕРОМЕТРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ПАРАМЕТРОВ НАКЛОНА

Д.Г. Миловзоров, Е.С. Морозова, А.С. Дьячков

В статье рассматриваются математические модели трёхосевого акселерометрического преобразователя параметров наклона.

Ключевые слова: математическая модель, акселерометр, преобразователь параметров наклона

Одним из вариантов построения преобразователей параметров наклона (ППН) квазистационарных и подвижных объектов является применение в общей компоновке подобного рода аппаратуры трёхосевого акселерометрического датчика, выполненного в едином конструктиве (рисунок 1) и обеспечивающего измерение всех трёх проекций ускорения свободного падения gi(xyz).

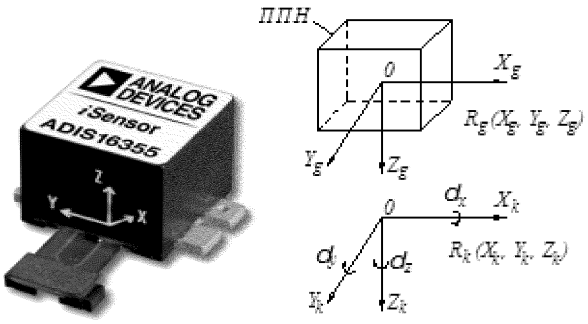

Рисунок 1- Внешний вид трехосевого акселерометрического датчика ADIS 16355 и отдельные плоские повороты базиса R_K

Такие устройства выпускаются серийно, вполне доступны и имеют одну важную особенность, а именно – нормированные метрологические характеристики, указываемые в документации на изделие. Причем заявляемые и, по-видимому, гарантируемые точностные показатели позволяют на сегодняшний день отнести такие датчики к разряду прецизионных сенсоров. Так, одним из важнейших параметров, который во многом определяет точность вычислений искомых углов пространственной ориентации объектов, является взаимная «неортогональность» ориентации осей чувствительности акселерометров, составляющая $\pm$ 0,1^0. При идеальной компоновке ППН с таким датчиком, при которой его рёбра куба строго ориентируются по ортонормированным осям корпуса, искомые углы– зенитный угол θ и визирный угол φ определяются по известным базовому векторно-матричному уравнению $\vec{g}_{R_K} = A_{\varphi(z)} \cdot A_{\theta(y)} \cdot \vec{g}_{R_0}$ и базовым статическим математическим моделям [2]:

$$\left.\begin{aligned} g_x &= -g \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \\ g_y &= g \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ g_z &= g \cdot \cos\theta \end{aligned}\right\};$$

$$\varphi = arctg\left[\frac{g_y}{(-g_x)}\right]; \qquad (1)$$

$$\theta = arctg\left[\frac{(\sqrt{g_x^2 + g_y^2})}{g_z}\right].$$

где $A_{\varphi(z)}$ и $A_{\theta(y)}$ - матрицы направляющих косинусов.

Нормированные значения «неортогональности» ($\pm$0,1^0)осей чувствительности акселерометров по отношению к прямоугольному базису самого трёхкомпонентного датчика $R_Д(X_Д, Y_Д, Z_Д)$ (рисунок 1),безусловно, является положительным фактором ППН. Однако, его позиционирование в корпусе ППН при окончательной сборке аппаратуры приводит к дополнительным (δ_i) угловым отклонениям базиса $R_Д(X_Д, Y_Д, Z_Д)$ по отношению к базису $R_K(X_K, Y_K, Z_K)$, что приводит в конечном итоге к появлению инструментальных погрешностей в определении искомых углов $\Delta\theta$ и $\Delta\varphi$. Применение метода механической дополнительной регулировки по «приведению» к строгой параллельности осей этих базисов представляется сложным и трудоёмким технологическим процессом. Наиболее удобным и целесообразным является путь программно-алгоритмической коррекции результатов измерений проекций $g_i(x, y, z)$, т.е. выходных сигналов с самих акселерометрических датчиков, базирующийся на обобщенных математических моделях ППН, учитывающих возможные отклонения осей базисов $R_Д(X_Д, Y_Д, Z_Д)$ и $R_K(X_K, Y_K, Z_K)$.

При разработке обобщённых математических моделей данного варианта ППН примем следующие допущения.

Статические характеристики всех трёх акселерометров являются идентичными и представляют собой линейные функции.

Оси чувствительности акселерометров строго совпадают с осями ортонормированного базиса ($R_Д(X_Д, Y_Д, Z_Д)$) датчиков ППН.

Отсутствует температурный дрейф и иные дополнительные и динамические погрешности.

Необходимо заметить, что принятые допущения не оказывают какого-либо существенного влияния при математическом моделировании ППН с учётом влияния малых углов δ_i. При составлении обобщённого векторно-матричного уравнения основные повороты базиса R_0, связанного с пространственной прямоугольной системой координат Земли, которые последовательно осуществляются на угол φ вокруг оси OZ_0 и на угол θ вокруг оси OY_0, дополняются последовательными поворотами (при переходе от базиса R_K к базису $R_Д$) вокруг осей соответственно OX_K, OY_K и OZ_K на малые углы δ_x, δ_y и δ_z.

Как известно из общей теории пространственной ориентации, в частности – из теории матриц, при пространственных ортогональных преобразованиях базисов последовательность отдельных плоских поворотов играет весьма существенную роль. Поэтому, учитывая базовое векторно-матричное уравнение (1), необходимо составлять и анализировать следующее обобщённое векторно-матричное уравнение [2]:

$$\vec{g}_{R_1} = A_{\delta_z(z)} \cdot A_{\delta_y(y)} \cdot A_{\delta_x(x)} \cdot \vec{g}_{R_K}, \quad (2)$$

где вектор $\vec{g}_{R_K}$ в базисе R_K корпуса ППН определяется проекциями $g_i(x, y, z)$ в системе скалярных уравнений (1); $A_{\delta_z(z)}$, $A_{\delta_y(y)}$ и $A_{\delta_x(x)}$ – матрицы направляющих косинусов дополнительных поворотов базиса R_K вокруг осей $OL_{(L=X,Y,Z)}$ на соответствующие малые углы $\delta_{i(X,Y,Z)}$.

Тогда произведение матриц $A_{\delta_{i(i)}}$ в уравнении (2) будет иметь вид результирующей матрицы:

$$A_P = A_{\delta_z(z)} \cdot A_{\delta_y(y)} \cdot A_{\delta_x(x)}. \quad (3)$$

При этом обобщённое векторно-матричное уравнение для (2) будет выглядеть следующим образом: $\vec{g}_{R_K} = A_P$, или

$$\begin{Vmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Vmatrix}; \quad (4)$$

$$X = \cos\varphi \sin\theta;$$
$$Y = \sin\varphi \sin\theta;$$
$$Z = \cos\theta.$$

Систему скалярных уравнений связи несложно получить, выполнив соответствующие преобразования в уравнении (4):

$$\left.\begin{aligned} g_x &= a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \\ g_y &= a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \\ g_z &= a_3 X + b_3 Y + c_3 Z \end{aligned}\right\}. \quad (5)$$

В данных выражениях $g_i(x, y, z)$ – это измеренные значения сигналов с акселерометров; a_i, b_i и c_i – константы, определяемые конструктивными особенностями ППН, а именно – малыми угловыми параметрами

$\delta_{i(X,Y,Z)}$; X,Y,Z – искомые переменные, характеризующие конкретную пространственную ориентацию ППН посредством углов θ и φ (1).

Для получения обобщённых математических моделей ППН необходимо решить систему скалярных трансцендентных уравнений (5) относительно неизвестных переменных X,Y,Z по которым и определить в дальнейшем искомые углы θ и φ.

При решении данной системы уравнений (5) можно воспользоваться методом определителей, основываясь на линейных преобразованиях прямоугольных базисов [1]:

$$X=\frac{\Delta X}{\Delta};Y=\frac{\Delta Y}{\Delta};Z=\frac{\Delta Z}{\Delta};\qquad (6)$$
$$tg\varphi=\frac{\Delta Y}{\Delta X};tg\theta=\frac{\sqrt{\Delta X^2+\Delta Y^2}}{\Delta Z}.$$

В аналитических выражениях определителей Δ и $\Delta_{i(X,Y,Z)}$ есть слагаемые, которые составлены из сомножителей, включающих произведения синусов малых угловых параметров, т.е. $\sin\delta_i \sin\delta_j$.

Поэтому, пренебрегая данными слагаемыми, как членами второго порядка малости, неизвестные переменные X,Y,Z определятся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{1}{a_1}\left[g_x-g_y\frac{b_1}{b_2}-g_z\frac{c_1}{c_3}\right]\\ Y&=\frac{1}{b_2}\left[g_y-g_x\frac{a_2}{a_1}-g_z\frac{c_2}{c_3}\right]\\ Z&=\frac{1}{c_3}\left[g_z-g_y\frac{b_3}{b_2}-g_x\frac{a_3}{a_1}\right]\end{aligned}\right\}\qquad (7)$$

и, в соответствии с (5), математические модели ППН будут выглядеть следующим образом:

$$tg\varphi=\frac{a_1\left[g_y-g_x\frac{a_2}{a_1}-g_z\frac{c_2}{c_3}\right]}{b_2\left[g_x-g_y\frac{b_1}{b_2}-g_z\frac{c_1}{c_3}\right]};\qquad .(8)$$
$$tg\theta=\frac{c_3\sqrt{\left[\frac{1}{a_1}\left(g_x-g_y\frac{b_1}{b_2}-g_z\frac{c_1}{c_3}\right)\right]^2+\left[\frac{1}{b_2}\left(g_y-g_x\frac{a_2}{a_1}-g_z\frac{c_2}{c_3}\right)\right]^2}}{\left[g_z-g_y\frac{b_3}{b_2}-g_x\frac{a_3}{a_1}\right]}$$

Необходимо отметить, что математические модели (8) являются обобщёнными, из которых как частные решения следуют известные базовые модели и модели, соответствующие условиям тех или иных допущений. Причём, в качестве a_i, b_i, c_i в аналитических выражениях (8) участвуют соответствующие константы – элементы результирующей матрицы. А при принимаемом допущении $(\cos\delta_i\approx 0;\sin\delta_i\approx 0)$ обобщённые математические модели (8) преобразуются к более простому виду:

$$tg\varphi=\frac{\left[g_y-\delta_z g_x-\delta_x g_z\right]}{\left[g_x-\delta_z g_y+\delta_y g_z\right]};\qquad .(9)$$
$$tg\theta=\frac{\sqrt{\left[g_y-\delta_z g_x-g_z\right]^2+\left[g_x-\delta_z g_y+\delta_y g_z\right]^2}}{\left[g_z+\delta_x g_y-\delta_y g_x\right]}$$

Таким образом, на основе формирования, а также соответствующих преобразований и решений векторно-матричного уравнения, дополненного матрицами направляющих косинусов малых углов δ_i, предложены обобщенные статические математические модели ППН на основе трёхосевого акселерометрического датчика, позволяющие программно-алгоритмическим путём осуществлять коррекцию измеряемых сигналов $g_i(x,y,z)$. Это обеспечивает повышенную точность определения искомых углов пространственной ориентации квазистационарных и подвижных объектов θ и φ обосновано предопределяет инвариантность ППН к его пространственному позиционированию в корпусе измерительной аппаратуры в пределах малых значений углов δ_i.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковшов, Г.Н. Приборы контроля пространственной ориентации при бурении/ Г.Н. Ковшов , Г.Ю. Коловертнов.- УФА 2001. -228 с.
2. Ковшов, Г.Н. Инклинометры (основы теории и проектирования)/ Ковшов Г.Н., Алимбеков Р.И., Жибер А.В. – Уфа: ГИЛЕМ, 1998. – 380 с

*Доцент **Миловзоров Д.Г.**, midimka@yandex.ru- каф. Электроники и биомедицинских технологий Уфимского государственного авиационного технического университета; старший преподаватель **Морозова Е.С.** тел. 8-927-317-87-24, m_l_s@mail.ru- каф. Информационно-измерительной техники Уфимского государственного авиационного технического университета; аспирант **Дьячков А.С.** frost4u@rambler.ru- каф. Информационно-измерительной техники Уфимского государственного авиационного технического университета*