УДК 536.7

ТЕОРЕМА О МИНИМУМЕ ПРОИЗВОДСТВА ЭНТРОПИИ И РАСЧЕТ СХЕМ

В.Я. Федянин, П.В. Демченко, Ю.А. Квашнин

Показано, что использование принципа минимума производства энтропии позволяет разработать универсальную методику решения задачи расчета схем (электрических, тепловых и т.п.). Общий подход проиллюстрирован на примере электрических и тепловых сетей.

Неравновесные системы; скорость производства энтропии; энергетические цепи; принцип минимума производства энтропии.

ВВЕДЕНИЕ

Эквивалентность задачи расчета схем (электрических, гидравлических, газовых и т.п.) и пары двойственных задач оптимизации в рамках общей теории выпуклого программирования показана в работе [1].

С другой стороны в современной термодинамике сформулированы условия, при которых любая система, находящаяся в неравновесном состоянии благодаря потокам энергии и вещества, достигает стационарного состояния [2]. Теорема Глансдорфа-Пригожина устанавливает общие условия существования стационарного состояния любой неравновесной системы: *в стационарном состоянии функция диссипации (соответственно скорость возрастания энтропии) минимальна при заданных значениях сил и постоянстве феноменологических коэффициентов*.

Таким образом, если существуют внешние условия, препятствующие достижению системой положения термодинамического равновесия, то установившееся стационарное состояние будет соответствовать минимальной скорости возникновения энтропии. Если же таких препятствий нет, то стационарное состояние переходит в равновесное, в котором скорость возникновения энтропии достигает своего абсолютного минимума – нуля.

Электрические, газовые, тепловые, гидравлические и др. сети представляют собой примеры систем, находящихся в неравновесном состоянии благодаря потокам энергии и вещества. Несмотря на различие физической природы происходящих в них процессах может быть разработан универсальный подход к расчету их параметров на основе теоремы Глансдорфа - Пригожина с использованием математического аппарата вариационного исчисления и исследований экстремальных значений функций многих переменных.

Проиллюстрируем указанное положение на двух примерах: расчет сложных цепей постоянного тока; поквартирный анализ тепловых потерь жилого здания.

ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Необратимый переход электрической энергии в теплоту в каждом резистивном элементе электрической цепи приводит к производству энтропии [2]: $\frac{dS}{dt} = \frac{UI}{T}$. Здесь U, I – падение напряжения и ток, протекающий через резистивный элемент, соответственно. T – температура элемента. Для системы, состоящей из N резистивных элементов, полное производство энтропии дается формулой:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N} U_k I_k = \frac{P}{T}, \qquad (1)$$

где P – суммарная мощность тепловыделения в N резистивных элементах. При постоянной температуре требованию теоремы Глансдорфа-Пригожина удовлетворяет условие: $P(U_{k0}, I_{k0}) = \min P(U_k, I_k)$, где U_{k0}, I_{k0} – множество значений падений напряжений и токов, придающее наименьшее значение мощности тепловыделения в резистивных элементах.

В наиболее общем случае электрическая цепь представляет собой N точек (электрических узлов) соединенных между собой попарно с помощью $N(N-1)/2$ проводящих элементов [3].

Рассмотрим задачу в линейном приближении. Проводимость проводника, который соединяет любую пару узлов, например i-ый и j-ый, обозначим через $g_{ij} = \dfrac{1}{R_{ij}}$. Пусть электрические потенциалы этих точек φ_i, φ_j. Электродвижущая сила (если она есть), которая действует вдоль проводника, равна E_{ij}. Падение напряжения на k-том резистивном элементе, соединяющем i-ый и j-ый узлы, $U_k = I_{ij} R_{ij}$, ток – $I_{ij} = (E_{ij} + \varphi_i - \varphi_j) g_{ij}$.

После подстановки эти соотношений в формулу (1) суммарную мощность тепловыделения рассматриваемой системы можно представить в следующем виде:

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\left[E_{ij} - (\varphi_i - \varphi_j)\right]^2 g_{ij} \tag{2}$$

Для постоянных величин, входящих в (2), справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &g_{ij} = g_{ji};\, g_{ii} = g_{jj} = 0; \\ &E_{ij} = -E_{ji};\, E_{ii} = E_{jj} = 0 \end{aligned}. \tag{3}$$

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: найти минимум тепловой функции (2) *N* переменных.

Как видно из формулы (2) тепловая функция $P(\varphi)$, где $\varphi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N) \in R^N$ – положительно определенная, так как она принимает положительные значения во всех точках пространства R^N (при условии, что хотя бы одна пара значений величин $E_{ij} g_{ij}$ отлична от нуля). Таким образом, необходимым и достаточным условием минимума тепловой функции в точке $\varphi_0(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N) \in R^N$ является равенство нулю ее градиента в этой точке.

Преобразуем тепловую функцию системы *P* в квадратичную функцию стандартного вида:

$$P = Q(\varphi) - 2L(\varphi) + P_0, \tag{4}$$

где

$$Q(\varphi) = \sum_{i,j=1}^{N} G_{ij}\varphi_i\varphi_j;\, L(\varphi) = \sum_{i}^{N} J_i\varphi_i;\, P_0 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} E_{ij}^2 g_{ij}.$$

Коэффициенты квадратичной и линейной функций рассчитываются по следующим формулам:

$$G_{ij} = \begin{cases} G_i; & i = j, \\ -g_{ij}; & i \neq j. \end{cases};\; J_i = \sum_{j=1}^{N} J_{ij}, \tag{5}$$

где $G_i = \sum_{j=1}^{N} g_{ij}$, а $J_{ij} = E_{ij} g_{ij}$ – токи короткого замыкания ветвей.

Условие равенства нулю градиента квадратичной функции (4) дает следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi_i} = 0 \quad или \quad \frac{\partial Q}{\partial \varphi_i} - 2\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0, \quad i = 1,2,..., N \tag{6}$$

Умножая левую и праву части уравнений (6) на φ_i и складывая левые и правые части N уравнений, получим:

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_i \frac{\partial Q}{\partial \varphi_i} = 2\sum_{i=1}^{N}\varphi_i \frac{\partial L}{\partial \varphi_i}. \tag{7}$$

$Q(\varphi)$ и $L(\varphi)$ – дифференцируемые однородные функции степени 2 и 1, соответственно. По теореме Эйлера об однородных функциях:

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_i \frac{\partial Q}{\partial \varphi_i} = 2Q(\varphi) \quad а \quad \sum_{i=1}^{N}\varphi_i \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = L(\varphi).$$

Подставляя в уравнение (5), получим:

$$Q(\varphi_0) - L(\varphi_0) = 0, \tag{8}$$

где $\varphi_0(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N)$ – набор значений узловых потенциалов, при которых тепловая функция системы – *P* становится минимальной.

С помощью матричных обозначений систему уравнений (8) можно записать в виде скалярных произведений. Рассмотрим произведение $\sum_{i,j=1}^{N} G_{ij}\varphi_j$ как вектор, образованный при преобразовании множества значений узловых потенциалов {*φ*} (G_{ij} – матрица коэффициентов преобразования). Легко показать, что если все компоненты вектора {*φ*} равны, то есть $\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = ... = \varphi_N^0 = \lambda$, то в результате рассматриваемого преобразования получается нулевой вектор:

$$\sum_{i,j=1}^{N} G_{ij}\varphi_j^0 = \begin{Vmatrix} G_1 & -g_{12} & . & . & . & -g_{1N} \\ -g_{21} & G_2 & . & . & . & -g_{2N} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ -g_{N1} & -g_{N2} & . & . & . & G_N \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \lambda \\ \lambda \\ . \\ . \\ . \\ \lambda \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{Vmatrix},$$

Представим квадратичную форму *Q(φ)* в виде скалярного произведения двух многомерных векторов:

$$Q(\varphi) = (\varphi, G\varphi) = (G\varphi, \varphi), \tag{9}$$

где G – квадратная матрица порядка *N*, элементы которой рассчитываются по формулам (5). Напомним, что в силу условий (3) матрица G – симметрическая. Как следует из формул (4) и (5) однородную линейную функцию также можно представить в виде скалярного произведения:

$$L(\varphi\ ) = (J, \varphi)\ . \qquad (10)$$

Подставляя выражения (9) и (10) в уравнение (8), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения узловых потенциалов линейных цепей постоянного тока:

$$G\varphi = J\ , \qquad (11)$$

или

$$\begin{Vmatrix} G_1 & -g_{12} & . & . & . & -g_{1N} \\ -g_{21} & G_2 & . & . & . & -g_{2N} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ -g_{N1} & -g_{N2} & . & . & . & G_N \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_N \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} J_1 \\ J_2 \\ . \\ . \\ . \\ J_N \end{Vmatrix}$$

.

Полученное уравнение (11) совпадает с *основным уравнением многополюсника,* полученном при решении задач анализа и синтеза электрических цепей с помощью достаточно сложной процедуры, использующей топологические уравнения на основе законов Кирхгофа [4]. Матрица G называется *неопределенной матрицей проводимости* или *неопределенной матрицей Y-параметров многополюсника*.

Отметим, что с учетом уравнения (11) мощность производства тепла любой электрической сетью может быть рассчитана с помощью простой формулы:

$$P(\varphi_0) = P_0 - L(\varphi_0)\ , \qquad (12)$$

ПОКВАРТИРНЫЙ АНАЛИЗ ТЕПЛОВЫХ ПОТЕРЬ ЖИЛОГО ЗДАНИЯ

При анализе теплоснабжения представим здание в виде многокомпонентной системы, теплоэнергетические характеристики которой определяются теплотехническими параметрами ограждающих конструкций и конструкцией системы отопления. Количество тепла, необходимого для создания комфортного микроклимата в жилых помещениях, определяется выбранным режимом работы отопительных приборов и режимом вентилирования жилых помещений. При поквартирном регулировании и учете тепловой энергии существенную роль начинают играть потоки тепла через разделяющие квартиры ограждающие конструкции и теплоотдача внутренних труб системы отопления здания. Пусть в здании располагаются N квартир (лестничная клетка и другие общедомовые помещения – N+1 квартира). Потери тепла δQ_i за счет теплопередачи любой (i-той) квартиры за малый интервал времени от *t* до *t+dt* даются следующим выражением [5]:

$$\delta Q_i = K_{i0} F_{0i} (T_i - T_0) dt\ , \qquad (13)$$

где K_{i0}, F_{i0} – приведенный коэффициент теплопередачи и площадь, соответственно, внешних ограждающих конструкций i-той квартиры; T_i, T_0 – средняя температура внутреннего и окружающего воздуха, соответственно.

Изменение энтропии i–той квартиры – dS_i за счет передачи тепла δQ_i термостату, находящемуся при температуре T_0 [6]:

$$dS_i = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_i} \right) \delta Q_i\ . \qquad (14)$$

С учетом (13) скорость производства энтропии можно представить в следующем виде:

$$\frac{dS_i}{dt} \approx K_{i0} F_{i0} \frac{(T_i - T_0)^2}{T_0^2}\ . \qquad (15)$$

При выводе формулы учтена относительная разность температур – малая величина ($(T_i - T_0)/T_0$ <<1).

Суммарная скорость производства энтропии всего объекта:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T_0^2} \sum_{i=1}^{N+1} K_{i0} F_{i0} (T_i - T_0)^2\ . \qquad (16)$$

При условии постоянства температуры внешней среды требованию теоремы Гланс-дорфа-Пригожина удовлетворяет условие: $P(T_{k0}) = \min P(T_k)$, где T_{k0} – множество значений падений температур, придающее наименьшее значение диссипативной функции .

$$P(T_i) = \sum_{i=1}^{N+1} K_{i0} F_{i0} (T_i - T_0)^2\ . \qquad (17)$$

Причиной, препятствующей выравниванию температур внутренних помещений здания и окружающего воздуха, являются теплопоступления от нагревательных приборов, поэтому условие минимальности диссипативной функции (17) должно рассматриваться с учетом этого обстоятельства. Тепловой баланс i-той квартиры может быть представлен в следующем виде:

$$K_{i0} F_{i0} (T_i - T_0) + \sum_{j=1}^{N+1} K_{ij} F_{ij} (T_i - T_j) = Q_i\ ,$$

где Q_i – суммарная мощность тепловыделения отопительных приборов в i-той квартире; K_{ij}, F_{ij} – приведенный коэффициент теплопередачи и площадь, соответственно, внутренних ограждающих конструкций между i-той и j-той квартирами.

Введя следующие обозначения:

$$U_i = T_i - T_0, k_{i0} = K_{i0}F_{i0}, k_{ij} = K_{ij}F_{ij},$$

учитывая, что $k_{i0} = k_{ji}$ и $\sum_{i=1}^{N+1}\sum_{j=1}^{N+1} K_{ij}F_{ij}(T_i - T_j) = 0$, получим

$$P(T_i) = (U, AU) - 2(QU) + P_0 . \quad (18)$$

Здесь

$$U(U_1, U_2, ...U_{N+1}), Q(Q_i, Q_2, ...Q_{N+1}), P_0 = \sum_{i=1}^{N+1} Q_i^2 ,$$

$$A_{ij} = \begin{cases} K_i; & i = j, \\ -k_{ij}; & i \neq j. \end{cases};$$

$$K_i = k_{i0} + \sum_{j=1}^{N+1} k_{ij} , \quad (19)$$

Приравнивая нулю градиент диссипативной функции, используя теорему Эйлера об однородных функциях, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$AU = Q . \quad (20)$$

Проинтегрировав по времени левую и правую части уравнения (20), получим систему линейных уравнений:

$$AD = Q^S . \quad (21)$$

или

$$\begin{Vmatrix} K_1 & -k_{12} & . & . & -k_{1N+1} \\ -k_{21} & K_2 & . & . & -k_{2N+1} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ & . & . & . & . \\ -k_{(N+1)1} & -k_{(N+1)2} & . & . & K_{N+1} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ . \\ . \\ U_{N+1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Q_1^S \\ Q_2^S \\ . \\ . \\ . \\ Q_{N+1}^S \end{Vmatrix} .$$

Здесь $D_i = \int_0^t (T_i - T_0)dt$ – месячный показатель градусосуток, i-той квартиры; $Q_i^S = \int_0^t Q_i\, dt$ – теплота, потребляемая системой отопления i-той квартиры.

Уравнение (21) получено нами ранее [7] с использованием известной методики расчета параметров стационарной теплопередачи через ограждения [8]. На основе этих исследований была разработана методика распределения общедомового потребления тепловой энергии между индивидуальными потребителями в жилых зданиях. Эта методика утверждена в установленном законодательством порядке и успешно прошла многолетнюю апробацию в условиях эксплуатации жилого здания.

ВЫВОДЫ

В работе показано, что расчет параметров систем, находящихся в неравновесном состоянии благодаря потокам энергии и вещества, может быть сведена к решению математической задачи поиска экстремальных значений диссипативной функции N переменных. Алгоритм расчета основан на использовании теоремы Гландсдорфа-Пригожина, которая устанавливает общие условия существования стационарного состояния любой неравновесной системы. Основное преимущество предложенного подхода связано с тем, что появляется возможность более широко использовать ЭВМ уже на стадии формулировки математических моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Образцов И.Ф., Гвишиниани А.Д., Гурвич В.А. Расчет схем и двойственные задачи выпуклого программирования // Доклады АН СССР. -1986. - №5. – С.1062-1067.

2. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур: Пер. с англ. Ю. А. Данилова и В. В. Белого – М.: Мир, 2002.–- 461с.

3. Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме. В двух томах. т. I. – М.: Наука, 1989. – с. 415.

4. Попов В.П. Основы теории цепей: Учеб. для вузов – М.: Высш. Шк., 2007. – с. 575.

5. Теплотехника: Учеб. для вузов /В.Н.Луканин, М.Г. Шатров, Г.М. Камфер и др; Под. Ред. В.Н. Луканина – М.: Высш. шк., 2003. – 671 с.

6. Толмачев В.В. и др. Термодинамика и электродинамика сплошной среды /В.В. Толмачев, А.М. Головин, В.С. Потапов; Под общ. ред. В.В. Толмачева.–М.: Изд-во МГУ, 1988. – 232 с.

7. Гамбург А.В., Зуев М.Г., Федянин В.Я. О методике распределения общедомового потребления тепловой энергии между индивидуальными потребителями // Ползуновский вестник. – 2006. №4. – С.43-47.

8. Богословский В.Н. Строительная теплофизика (теплофизические основы отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха) – М.: Высш. школа, 1982. – 415 с.

Федянин Виктор Яковлевич, *д.т.н., профессор каф. «Электротехники автоматизированного электропривода», ФГБОУ ВПО Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Барнаул, E-mail: fedyanin054@mail.ru*

Демченко Павел Витальевтч, *аспирант каф. «Электротехники и автоматизированного электропривода», ФГБОУ ВПО Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Барнаул, E-mail: aspecator@gmail.com*

Квашнин Юрий Алексеевич, *доцент каф. «Электротехники и автоматизированного электропривода», ФГБОУ ВПО Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Барнаул, тел. 8(3852)46-22-93*