

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАСТИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ИХ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Л.В. Куликова, А.В. Григорьев

Даны общие представления построения математических моделей поляризованной среды при электротехнологической обработке растительных материалов с учетом вероятностной плотности распределения диполей. Полученные модели позволяют обосновать энергоэффективные режимы обработки.

Ключевые слова: электротехнологическая обработка растительных материалов, электрофизические свойства, поляризация, математическое моделирование.

Обоснование энергоэффективных режимов обработки растительных материалов необходимо осуществлять с учетом их электрофизических свойств, характеристики которых варьируются в широких пределах и зависят как от электрических параметров, так и от технологических параметров процесса обработки. Для описания электрофизических характеристик поляризованной среды классические методы расчета необходимо уточнять и приводить к пространственно-временным координатам с учетом физики процесса электромагнитных явлений [1].

Известно, что между пятью векторами электромагнитного поля $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{\delta}$ имеются только два независимых соотношения (уравнения Максвелла):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{\delta}, \end{aligned}$$

где \vec{E} - напряженность электрического поля, \vec{B} - магнитная индукция, \vec{D} - вектор электрического смещения, \vec{H} - напряженность магнитного поля, $\vec{\delta}$ - вектор плотности электрического тока.

Для того чтобы сделать эту систему уравнений полной необходимо ввести в расчет дополнительные соотношения между векторами \vec{D} и \vec{E} , а также между векторами \vec{B} и \vec{H} , т.е. дополнить эту систему уравнениями материальной связи между векторами поля или соответствующими функциональными

зависимостями для веществ с нелинейными свойствами.

В простейшем случае однородного изотропного вещества эти соотношения имеют известный вид $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$. Здесь однородность понимается в смысле постоянства электрофизических свойств во всех точках вещества. В случае неоднородного анизотропного вещества его свойства уже не могут быть описаны скалярными величинами

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon, \quad \mu_a = \mu_0 \mu,$$

где ε_a , μ_a - абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно, и требуется введение в расчет тензорных соотношений. В этом более сложном случае неоднородных анизотропных веществ обостряются различия между микроскопической и макроскопической позицией в интерпретации проницаемостей или их тензорных эквивалентов. По микроскопической теории физические вещества должны быть выведены из его атомной структуры. Эта теория должна связать указанную структуру с макроскопическими параметрами $\varepsilon = f(x, y, z, t)$ и $\mu = f(x, y, z, t)$ вещества [2]. Таким образом, с одной стороны требуется сделать систему уравнений электромагнитного поля полной, т.е. как указывалось выше, дополнить эту систему уравнениями материальной связи между векторами поля или соответствующими функциональными зависимостями для веществ с нелинейными свойствами. С другой стороны уравнения материальной связи в общем случае должны описывать и поляризационные свойства веществ. Следовательно, для описания электромагнитных полей в

поляризуемых средах необходимо совместное решение уравнений Максвелла и уравнений, описывающих специфические свойства среды. Выведем эти соотношения на основе энергетической концепции.

Энергия электрического поля поляризованного тела определяется его формой и для произвольного эллипсоида зависит от направления вектора поляризации относительно его осей. Энергия минимальна, если вектор поляризации направлен вдоль наибольшей оси. Рассмотрим вращение вектора поляризации в эллипсоидальном теле при воздействии внешнего поля. Область самопроизвольной поляризации в виде эллипсоида, в которой поляризованность однородна, под действием внешнего поля может поворачиваться на произвольный угол α , не изменяясь по величине. Большая ось эллипсоида составляет угол β с направлением внешнего поля (рис. 1). Пусть при отсутствии внешнего поля вектор поляризации был параллелен большой оси и составлял угол $\beta > \pi/2$ с предполагаемым направлением внешнего поля \vec{E} .

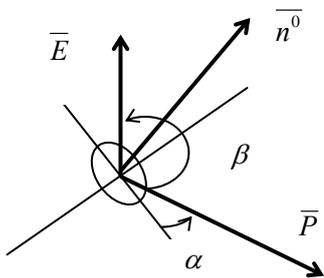


Рисунок 1 - Модельное расположение диполя в пространстве.

Вектор поляризации \vec{P} в поле \vec{E} поворачивается на угол α под действием вращающегося момента и уравнивается в этом положении из-за дополнительно возникающего поля \vec{E}_p . Вращающий момент в элементе объема определяется векторным произведением векторов поляризации и вектором электрического смещения. В однородном поле направление этих векторов совпадает, поэтому в положении равновесия результирующее поле $\vec{E}_n = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$ должно совпадать по направлению с вектором поляризации. Математически это означает, что нормаль к вектору \vec{P} и составляющая внеш-

него поля должны уравниваться соответствующей составляющей, вызванной поляризованностью вещества. Таким образом, условие равновесия

$$\vec{E}_n = \vec{E}_0 - \vec{E}_p = 0$$

и может быть записано в развернутом виде

$$\frac{2E_n}{P(B-A)} \sin(\beta - \alpha) = \sin 2\alpha,$$

где A и B - деполаризующие факторы для большой и малой осей эллипсоида.

Это уравнение при амплитуде

$k = \frac{2E_0}{P(B-A)} < 1$ имеет три решения в диа-

пазоне $0 < \alpha < \pi$ (рис. 2). Первое решение (точка 1) является устойчивым, второе (точка 2) - неустойчивым, третье (точка 3) также является устойчивым. Переход из точки 1 в точку 3 затруднен тем, что в промежуточных положениях энергия больше, чем в крайних. Устойчивость равновесия выясняется по знаку нормальной составляющей результирующего поля \vec{E}_n .

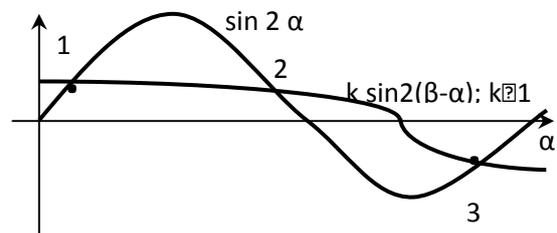


Рисунок 2 - Графическое представление решения уравнения $k \sin(\beta - \alpha) = \sin 2\alpha$.

Если при увеличении угла α возникает отрицательная составляющая E_n , то равновесие устойчиво, как в точках 1 и 3. Если при увеличении угла α возникает положительная составляющая E_n , то равновесие неустойчиво, как в точке 2.

Если внешнее поле $E_0 \rightarrow 0$, то устойчивые точки 1 и 3 стремятся соответственно к значениям 0° и 180° . При увеличении поля E_0 до некоторого критического значения E_k

(при амплитуде $\frac{2E_0}{P(B-A)} < 1$) точка 1 стано-

вится неустойчивой. Единственной устойчивой точкой остается точка 3. При дальнейшем увеличении поля угол α , соответствующий

точке 3, уменьшается, стремясь к β , что следует из уравнения равновесия. При очень большом внешнем поле приближенно можно считать, что $\alpha \approx \beta$, т.е. вектор поляризации направлен по внешнему полю. Нетрудно заметить, что чем больше разность $(B - A)$, т.е. чем больше вытянутость эллипсоида, тем больше значение критического поля E_k .

Необходимо отметить, что процесс поляризации означает появление преимущественной ориентации вектора поляризации \bar{P} по направлению внешнего поля \bar{E}_0 , что для исследуемого материала можно представить следующим выражением:

$$\delta P_p = P_q \sum V_i \delta (\cos \theta_i) + P_q \sum \cos \theta_i \delta V_i,$$

где δP_p - вариация вектора поляризации в направлении поля \bar{E}_0 , $\theta = \beta - \alpha$.

Первое слагаемое уравнения описывает вариацию поляризованности δP_1 , обусловленную процессами вращения вектора поляризации, рассмотренными выше. Второе слагаемое уравнения описывает вариацию поляризованности δP_2 , обусловленную процессами смещения граничных слоев.

Далее рассмотрим описание статистических моделей поляризованности, базирующихся на изложенной выше энергетической концепции. Такие статистические модели реализуют следующие идеи:

- общая характеристика процесса поляризации есть результат совокупного состояния множества отдельных элементов, задействованных в процессе;
- состояние отдельного элемента, участвующего в процессе, определяется спецификой поляризационной характеристики, например, характеристикой состояния произвольного эллипсоида, рассмотренного выше;
- состояние множества элементов в целом может быть представлено некоторыми функциями распределения, которые описывают вероятность нахождения элементов множества в возможном текущем состоянии, обусловленном заданной поляризационной характеристикой отдельного элемента (диполя).

Очевидно, что такие модели основаны на статистической обработке принятых определенных уравнений состояния отдельных элементов (диполей) множества. Статистиче-

ское описание таких процессов рассмотрим ниже.

Если рассматривать двумерную поляризацию, то можно записать следующее уравнение

$$2p \sin \theta = \sin 2(\varphi - \theta), \quad (1)$$

где φ - угол между большой осью диполя произвольной частицы и вектором напряженности электрического поля \bar{E} ; θ - равновесное положение вектора поляризации \bar{P}_q частицы по отношению к вектору \bar{E} ; $q = \frac{E}{E_a}$

- относительная напряженность электрического поля, выраженная через напряженность поля анизотропии E_a .

Усредненную поляризованность макрообъема с учетом плотностей вероятности можно определить:

$$P_{cp} = P_q \int_0^{2\pi} \int_{E_{a \min}}^{E_{a \max}} p(\alpha) p(E_a) \cos \theta d\alpha dE_a, \quad (2)$$

где $p(\alpha)$ - плотность вероятности распределения больших осей диполя в макрообъеме; $p(E_a)$ - плотность вероятности распределения поля анизотропии; α - угол между преимущественным направлением частиц и направлением больших осей произвольного диполя; угол θ определяется из трансцендентного уравнения (1).

В соответствии с уравнением (1) в данном случае при описании поляризованности принят механизм вращения векторов поляризации произвольно ориентированных частиц, что соответствует физическим свойствам исследуемого растительного материала, помещенного в электрическое поле.

Распространим математическую модель, основанную на формуле (1), на случай трехмерного объема. Пусть исследуемый материал состоит из бесконечно малых произвольно ориентированных невзаимодействующих частиц, например, диполей, имеющих одну большую ось, в направлении которой происходит сравнительно легкая поляризация. Оси перпендикулярные этой оси, будем считать равноценными. Учтем, что трансцендентное уравнение (1) можно записать в виде

$$q \sin \theta = \sin(\varphi - \theta) \cos(\varphi - \theta).$$

Введем в рассмотрение два новых единичных вектора: \bar{n} - единичный вектор, направленный вдоль большей оси диполя, \bar{m} -

единичный вектор, направленный вдоль оси \bar{P}_q частицы.

Развивая идеи, на которых основаны уравнения (1) и (2), получим новое уравнение соответствующей математической структуры

$$\bar{q} \times \bar{m} = (\bar{m} \times \bar{n})(\bar{m} \cdot \bar{n}), \quad (3)$$

где $\bar{q} = \frac{\bar{E}}{E_a}$.

Уравнение (3) необходимо решить относительно неизвестного вектора \bar{m} произвольной частицы при заданных направлениях векторов \bar{k} и \bar{n} . Направление вектора \bar{n} произвольной частицы задается в глобальной системе координат двумя углами (α, β) . Уравнение (3) определяет связь между векторами $\bar{k}, \bar{m}, \bar{n}$ для любой частицы реального трехмерного материала. Применением решения этого уравнения для всего ансамбля статистически распределенных физических частиц (диполей), последовательно находится множество векторов $\bar{m}_i(\bar{k}_i, \bar{n}_i)$ во всем макрообъеме исследуемой среды ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) (N – число физических частиц в макрообъеме). После расчета множества векторов \bar{m}_i отдельных частиц по уравнению (3) электрическое состояние всего макрообъема определим статистическим усреднением по следующему уравнению

$$\bar{P}_{cp} = P_q \int \int \int_{-\pi-\pi E_{a \min}}^{\pi \pi E_{a \max}} p(\alpha, \beta) p(E_a) \bar{m} d\alpha d\beta dE_a, \quad (4)$$

где $p(\alpha, \beta)$ – плотность вероятности распределения вдоль оси диполя в глобальной системе координат; $p(E_a)$ – плотность вероятности распределения поля анизотропии частиц в диапазоне

$$E_{a \min} \leq E_a \leq E_{a \max}.$$

Плотности вероятности распределения $p(\alpha, \beta)$, $p(E_a)$ вводятся как известные функции. Функцией $p(\alpha, \beta)$ учитывается способность частиц поворачиваться вдоль направления приложенного поля, а функцией $p(E_a)$ учитывается изотропность или анизотропность среды и конкретный характер анизотропии. Эти общие соображения являются предпосылкой для строго обоснованных методов определения функций $p(\alpha, \beta)$, $p(E_a)$.

Рассмотрим решение уравнения (3), которое строится на следующей математической основе. Запишем векторы $\bar{n}, \bar{k}, \bar{m}$, в глобальной системе координат:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \bar{i} \cos \alpha \cos \beta + \\ &+ \bar{j} \sin \beta + \bar{k} \sin \alpha \cos \beta, \\ \bar{q} &= \bar{i} x_k + \bar{j} y_k + \bar{k} z_k, \\ \bar{m} &= \bar{i} x_m + \bar{j} y_m + \bar{k} z_m = \\ &= \bar{i} \cos \alpha_m \cos \beta_m + \bar{j} \sin \beta_m + \\ &+ \bar{k} \sin \alpha \cos \beta_m. \end{aligned} \quad (5)$$

Определим функции в левой и в правой частях уравнения (3) в соответствии с системой (5):

При решении уравнения (3) воспользуемся численным методом, для чего введем в рассмотрение следующую функцию:

$$\begin{aligned} \zeta(x_m, y_m, z_m, x_k, y_k, z_k, \alpha, \beta) &= \\ &= [(\bar{m} \times \bar{n})(\bar{m} \cdot \bar{n})_i - (\bar{q} \times \bar{m})_i]^2 + \\ &+ [(\bar{m} \times \bar{n})(\bar{m} \cdot \bar{n})_j - (\bar{q} \times \bar{m})_j]^2 + \\ &+ [(\bar{m} \times \bar{n})(\bar{m} \cdot \bar{n})_k - (\bar{q} \times \bar{m})_k]^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где $(\bar{m} \cdot \bar{n})$, $(\bar{q} \times \bar{m})_k$ – соответствующие проекции векторных произведений. Таким образом, нахождение неизвестного вектора \bar{m} в уравнении (3) связано с решением системы уравнений (5), которая эквивалентна уравнению $\zeta = 0$. Расчет вектора \bar{m} произвольной частицы проведем методом Ньютона:

$$\bar{m}_{k+1} = \bar{m}_k - \begin{pmatrix} \bar{i} \frac{\zeta(\bar{m}_k, \dots)}{\alpha_m} + \bar{j} \frac{\zeta(\bar{m}_k, \dots)}{\beta_m} + \bar{k} \frac{\zeta(\bar{m}_k, \dots)}{\alpha_m} \end{pmatrix} \quad (6)$$

В последнем уравнении \bar{m}_k – значение вектора \bar{m} на n -ом шаге итерационного процесса. Далее необходимо рассчитать интегральную характеристику среды, а именно вектор \bar{P}_{cp} по уравнению (4).

Достоинством предложенной модели является континуальный подход к проблеме описания электрофизических свойств поляризованной среды, т.е. решается проблема идентификации всего макрообъема исследуемой среды: каждая точка отражает свойства всего материала в отличие от пространственных моделей, которые приводятся в специальной литературе. Эта проблема в

соответствии со структурой уравнения (3) решается в классе функций, описывающих естественным образом явления поляризации. Более того, введение в уравнение (4) вероятностных характеристик статистического ансамбля частиц не только соответствует реальной физической ситуации, но и делает описание свойств этой среды очень гибким с точки зрения учета разнообразных факторов, влияющих на ее электрофизические свойства.

Анализ такой модели путем проведения вычислительных экспериментов показывает, что если для изотропного материала задать равномерную плотность распределения диполей, то при любых вариациях остальных параметров на основе численного расчета можно с достаточно высокой точностью описать электрофизические свойства вещества путем введения оператора, который связан с нормированной плотностью распределения, пропорциональной объему диполей. При построении оператора математически описывается зависимость объема диполей от скалярного произведения вектора напряженности электрического поля и вектора поляризации микрочастицы. Эту зависимость можно представить статистической выборкой гистеронов.

С учетом изложенного, математическая модель трехмерного процесса поляризации имеет следующий вид:

$$\bar{P} = \frac{P_q \int_G \int_G (p(\bar{n}) \bar{m}(\bar{q}, \bar{n})) \int_C p_\psi([\Psi]) p_\nu([\Psi], \bar{q}, \bar{m}) dC dG}{\int_G (p(\bar{n}) \times \int_C p_\psi([\Psi]) p_\nu([\Psi], \bar{q}, \bar{m}) dC) dG}, \quad (7)$$

где P_q - поляризация вещества; \bar{n} - единичный вектор, идентифицирующий направление оси диполя; G - пространство всех возможных значений вектора \bar{n} ; $q = \frac{\bar{E}}{\bar{E}_a}$; \bar{E} - напряженность электрического поля; \bar{E}_a - напряженность поля анизотропии; $\bar{m}(\bar{q}, \bar{n})$ - векторный гистерон вращения; $p(\bar{n})$ - плотность распределения, задающая макроскопическую анизотропию материала; $[\Psi]$ - матрица-строка параметров скалярного гистерона смещения; C - область пространства параметров $[\Psi]$; $p_\nu([\Psi])$ - плотность распределения параметров $[\Psi]$; $p_\nu([\Psi], \bar{q}, \bar{m}(\bar{q}, \bar{n}))$ - скалярный гистерон

смещения. Все плотности распределения, входящие в (7) являются нормированными.

В большинстве случаев при практических расчетах целесообразно некоторым параметрам, входящим в $[\Psi]$, присвоить детерминированные значения. В этом случае кратность интеграла по области C уменьшится, что приведет к снижению затрат на вычисление.

Предложенная модель векторного описания поляризации обладает универсальностью, т.е. может быть применена для описания практически любых веществ. Однако при практическом применении неизбежно встает вопрос о том, какого вида должны быть плотности распределения и гистероны, входящие в (7), и каковы численные значения их параметров.

Эта проблема формально может быть решена методами параметрической оптимизации. Однако такой подход обладает существенным недостатком: число локальных минимумов целевой функции стремится к бесконечности при увеличении числа отчетов на эталонном участке.

Альтернативным способом вычисления параметров, входящих в статистическое соотношение (7), является разработка физико-математической модели на основе энергетической концепции, в которой учитывается обменная энергия, энергия анизотропии и собственно электрическая энергия. Путем минимизации свободной энергии строится система расчетных уравнений, которая решается относительно искомого вектора поляризации. Такая модель является микроскопической по отношению к размерам ионов и макроскопической по отношению к размерам анализируемой системы. Данная энергетическая концепция практически осуществима путем выделения отдельных элементарных объемов, множество которых анализирует исследуемую систему. Типичному элементарному объему приписываются все реальные физические свойства вещества, используемого в анализируемой системе. Решение расчетной системы уравнений для типичного элемента определяет свойства диполей в электрическом поле. По расчетным свойствам диполей определяются плотности распределения и параметры гистеронов, входящих в соотношение (7). Полученные статистические модели поляризованной среды на основе непрерывного подхода к проблеме математического моделирования открывают большие возможности для исследования электротехноло-

гических про-цессов и обоснования энерго-
сберегающих режимов.

И.И.Ползунова. № 2. // Барнаул, АлтГТУ, 2001. –
С. 118-122.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликова Л.В., Бараков А.Н. Использование
электромагнитных полей для обработки расти-
тельных материалов // Механизация и электрифи-
кация сельского хозяйства. – 2009. №5. – С. 29-31.

2. Куликова Л.В. Математическое описание
электрофизических свойств неоднородной среды
при электротехнологической обработке раститель-
ных материалов.// Вестник. АлтГТУ им.

Куликова Лидия Васильевна, д.т.н., про-
фессор, кафедра «Электрификация производст-
ва и быта» АлтГТУ им. И.И. Ползунова, тел.
(3852) 367-129, E-mail:elnis@inbox.ru

Григорьев Алексей Владимирович, инже-
нер, Алтайский центр энергосбережения, тел.
(38557) 342-322, E- mail:main@altcen.ru