УДК 536.24

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЧ-НАГРЕВА УГОЛЬНОГО ПОЛУМАССИВА

Вл.В. Саломатов, С.Э. Пащенко, С.О. Сладков, Вас.В. Саломатов

Решена аналитически взаимосвязанная задача электродинамики и теплопереноса в полуограниченном угольном массиве применительно к СВЧ-нагреву.

Ключевые слова: уголь, СВЧ-нагрев, электродинамика, теплоперенос, моделирование.

Процесс СВЧ-воздействия на различные диэлектрические материалы, к которым относится и уголь, как правило, моделируется с использованием уравнений электродинамики Максвелла (распространение электромагнитного излучения в среде) и уравнений теплопереноса (преобразование электромагнитной энергии в теплоту и ее передачу в веществе). Известно, что эффективность преобразования электромагнитной энергии в тепло увеличивается пропорционально квадрату напряженности электрического поля, зависит линейно от частоты излучения, диэлектрической проницаемости и тангенса диэлектрических потерь. Наиболее распространенные в России бурые угли даже в подсушенном состоянии относятся к неплохим диэлектрикам с параметрами: удельное электрическое сопротивление $\rho_э$ = (30÷35)·10^{11} Ом$^{-1}$см$^{-1}$; тангенс угла диэлектрических потерь tg δ = 0.035÷0.040; диэлектрическая проницаемость ε = 1.65÷2.0. Наличие влаги в бурых углях существенно повышает диэлектрические потери до tg δ = 0.15÷0.23, а ε = 3.5÷5.8. Такие макрохарактеристики угля обеспечивают его интенсивный СВЧ-нагрев. Наиболее часто на практике используется частота 2.45 ГГц, для которой разработаны достаточно эффективные СВЧ-генераторы магнетронного типа.

Взаимосвязанная система уравнений Максвелла и теплопроводности Фурье, описывающая СВЧ-нагрев, решается достаточно сложно не только аналитическими, но даже и численными методами. Однако, необходимость детального параметрического анализа СВЧ-нагрева, поиск фундаментальных закономерностей этого физического явления, проведение экспресс-расчетов заставляет осуществлять построение, прежде всего, аналитических решений. Поиску таких решений посвящена данная статья. На первом этапе решаются задачи СВЧ-воздействия на угольный полумассив в одномерном приближении. В этом случае можно рассматривать систему уравнений Максвелла, применительно к падению плоской электромагнитной волны нормально на поверхность, в виде [1]

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial t} + j\,, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}\,. \qquad (2)$$

Здесь D, B – электрическая и магнитная индукции; E, H – напряженность электрического и магнитного поля соответственно. Во внешней области *x* < 0 можно принять j=0, D=ε_0E, B = μ_0H, где ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная константы. Для массива *x* > 0 параметры связаны следующим образом j = σE, D = $\varepsilon_0\varepsilon$E, B = $\mu_0\mu$H, где σ – проводимость, ε, μ– относительная диэлектрическая и магнитная проницаемость, μ принимается равной единице.

На границе раздела (*x* = 0) из условия непрерывности следует

$E^-(0) = E^+(0)$, $H^-(0) = H^+(0)$.

Тогда падающая электромагнитная волна в области *x* ≤ 0 может быть описана существующими зависимостями

$$E_0^-(x,t) = A_0 \exp\left[i\left(wt - \kappa_0 x\right)\right],$$

$$H_0^- = E_0^-/2w_0\,,\quad S_0^- = A_0^2/2w_0 \qquad (3)$$

Здесь S_0^-– вектор Умова-Пойнтинга, κ_0, ω– волновое число и угловая частота соответственно, A_0– амплитуда электрического поля, ω_0– волновое сопротивление.

Из литературы известны также решения уравнений Максвелла для области $x > 0$, электрофизические параметры которой не зависят от температуры:

$$E^+ = A_0 F \exp\left[i\left(wt - \kappa x\right)\right],$$

$$H^+ = E^+/w\,,\qquad \kappa = \kappa_0\sqrt{\varepsilon_\kappa} \qquad (4)$$

где $\varepsilon_к$ – комплексная относительная диэлектрическая проницаемость среды ($\varepsilon_к = \varepsilon' - i\varepsilon''$), $w = \sqrt{m_0/e_0 e_\kappa}$ – волновое сопротивление.

Вектор Умова-Пойнтинга для полумассива имеет вид

$$S^{+}(x) = F_e S_0^{-} \exp(-2b\,x)\,, \qquad (5)$$

а интенсивность внутреннего теплового источника определится из выражения

$$q_v = -\mathrm{div}(S^{+}), \qquad (6)$$

Здесь F_e и β - коэффициенты энергетического прохождения и затухания, которые равны

$$F_e = \frac{2\left(\sqrt{e_\kappa} + \sqrt{e_\kappa^*}\right)}{\left(1+\sqrt{e_\kappa}\right)}\,,$$

$$b = \frac{\kappa_0\sqrt{e'}}{\sqrt{2}} tg\,d\left(1+\sqrt{1+tg^2 d}\right)^{-1/2}\,,$$

где tg $\delta = \varepsilon''/\varepsilon'$. Тогда, с учетом (5), (6), внутреннее теплообразование от поглощения СВЧ-излучения запишется

$$q_v(x) = q_{v_0} exp(-y\,x)\,, \qquad (7)$$

где $\psi = 2\beta$, $q_{vo} = \psi F_e S^{-}_{0.}$

После нахождения внутреннего источника тепла в угольном полумассиве (7) можно построить температурное поле, которое при постоянстве теплофизических свойств определится из уравнения энергии

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{q_{v_0}}{c\,r}\exp(-\psi x)\,, \qquad (8)$$

где сρ - объемная теплоемкость.

Рассмотрим ряд практически важных граничных и начальных условий к уравнению (8), которые допускают получение аналитических решений.

1. Полуограниченный массив $0 \le x \le \infty$ с нулевой температурой внешней поверхности и нулевой начальной температурой

при $t = 0$ $\quad T(x, 0) = 0,$ $\qquad$ (9)

$x = 0$ $\quad T(0, t) = 0,$ $\qquad$ (10)

$$x \to \infty \qquad \frac{\partial T(\infty,t)}{\partial x} = 0\,. \qquad (11)$$

Задачу (8)–(11) в силу однородности ее краевых условий будем решать операционным методом Лапласа. Переходя в (8)–(11) к изображениям, получим следующую систему уравнений рассматриваемой модели

$$T_L''(x, s) - \frac{s}{a} T_L(x, s) + \frac{q_{v_o}}{l\,s} e^{-y\,x} \qquad (8')$$

$$T_L(x, 0) = 0\,, \qquad (9')$$

$$T_L(0, s) = 0\,, \qquad (10')$$

$$T_L'(\infty, s) = 0\,. \qquad (11')$$

Здесь s – параметр преобразования Лапласа, $T_L(x, s)$ – изображение функции T(x, t), штрих – знак производной по координате.

Применим к (8') метод вариации произвольных постоянных и запишем решение (12)

$$T_L(x,s) = Ach\sqrt{\frac{s}{a}}x + Bsh\sqrt{\frac{s}{a}}x + \sqrt{\frac{a}{s}}ch\sqrt{\frac{s}{a}}x \times$$

$$\times\int_0^x \frac{q_{v_0}}{l\,s} e^{-yz}\, sh\sqrt{\frac{s}{a}}z\,dz - \sqrt{\frac{a}{s}}sh\sqrt{\frac{s}{a}}x\int_0^x \frac{q_{v_0}}{l\,s} e^{-yz}\, ch\sqrt{\frac{s}{a}}z\,dz$$

где A и B – константы интегрирования. Удовлетворяя граничным условиям (10'), (11') имеем итоговое решение задачи в изображениях

$$T_L(x,s) = \sqrt{\frac{a}{s}}ch\sqrt{\frac{s}{a}}x\int_0^x \frac{q_{v_0}}{l\,s} e^{-yz}\, sh\sqrt{\frac{s}{a}}z\,dz\; -$$

$$-\;\sqrt{\frac{a}{s}}sh\sqrt{\frac{s}{a}}x\int_0^x \frac{q_{v_0}}{l\,s} e^{-yz}\, ch\sqrt{\frac{s}{a}}z\,dz \qquad (13)$$

Производя интегрирование в (13) и переходя к оригиналам, получим окончательное решение задачи (8)–(11) в виде

$$T(x,t) = \frac{q_{v_0}}{l\,\psi^2}\Big[1-\exp(-\psi x)+\frac{1}{2}\exp\left(a\psi^2 t-\psi x\right)\times$$

$$\times\mathrm{erfc}\left(y\sqrt{at}-\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)-\frac{1}{2}\exp\left(a\psi^2 t+\psi x\right)\times \qquad (14)$$

$$\times\mathrm{erfc}\left(y\sqrt{at}+\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\Big]-\frac{q_{v_0}}{l\,\psi^2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

Если краевые условия (9), (10) являются неоднородными, то есть

при $t = 0$ $\quad T(x, 0) = f(x),$ $\qquad$ (9")

$x = 0$ $\quad T(0, t) = g(t),$ $\qquad$ (10")

имеем решение на основе функции Грина [2]

$$G(x,z\,,t) = \frac{1}{2\sqrt{p\,at}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-z\,)^2}{4at}\right]-\exp\left[-\frac{(x+z\,)^2}{4at}\right]\right\}$$

совпадающей с соответствующей характеристикой системы управления объектом с распределенными параметрами [3]. Окончательное решение в компактном виде запишется

$$T(x,t) = \int_0^\infty G(x,z\,,t)\,f(z\,)dz\;+$$

$$+\frac{x}{2\sqrt{p\,a}}\int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-t\,)}\right]\times \qquad (15)$$

$$\times\frac{g(t\,)\,dt}{(t-t\,)^{3/2}} + \int_0^\infty G(x,z\,,t)\frac{q_{v_0}}{c\,r}e^{-yz}\,dz\;\;,$$

2. Полуограниченный массив $0 \le x \le \infty$ с нулевой начальной температурой и теплоизоляцией на внешней поверхности

при $t = 0$ $\quad T(x, 0) = 0,$ $\qquad$ (16)

$x = 0$ $\quad \partial T(0,t)/\partial x = 0\,.$ $\qquad$ (17)

Поставленная математическая модель (8), (16), (17), (11) аналогично с использованием метода интегрального преобразования Лапласа имеет окончательное решение в следующем виде (18)

$$T(x,t)=\frac{2q_{v_0}}{\lambda\psi}\sqrt{at}\,\mathrm{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)-\frac{q_{v_0}}{\lambda\psi^2}\exp(-\psi x)+$$

$$+\frac{q_{v_0}}{2\lambda\psi^2}\exp(\psi^2 at-\psi x)\,\mathrm{erfc}\left(\psi\sqrt{at}-\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)+$$

$$+\frac{q_{v_0}}{2\lambda\psi^2}\exp(\psi^2 at+\psi x)\,\mathrm{erfc}\left(\psi\sqrt{at}+\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

Также, как и для рассмотренного примера 1, осуществим построение решения при неоднородных начальном, граничном и в самом дифференциальном уравнении нестационарной теплопроводности, то есть:

при $t = 0$ $\quad T(x, 0) = f(x)$, (19)

$$x = 0 \qquad l\,\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=q(t)\,. \qquad (20)$$

Наиболее универсальным методом для решения краевой задачи (8), (19), (20), (11) при наличии неоднородностей, как уже подчеркивалось, считается метод функций Грина [2]. Итоговое решение системы уравнений (8), (19), (20), (11) этим методом имеет вид

$$T(x,t)=\int_0^{\infty}G(x,x,t)\,f(x)dx-+$$

$$-\sqrt{\frac{a}{p}}\int_0^{t}\exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-t)}\right]\frac{g(t)}{\sqrt{t-t}}dt+ \qquad (21)$$

$$+\int_0^{\infty}G(x,x,t)\frac{q_{v_0}}{cr}e^{-yz}\,dx\ ,$$

где

$$G(x,x,t)=\frac{1}{2\sqrt{p\,at}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x)^2}{4at}\right]+\exp\left[-\frac{(x+x)^2}{4at}\right]\right\}$$

3. Для угольного полумассива с конвективным отводом тепла (при $0 \le x \le \infty$)

$$T\big|_{t=0}=f(x)\,, \qquad (22)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}-a\,T\big|_{x=0}=a\,g(t) \qquad (23)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x\to\infty}=0 \qquad (24)$$

где α – коэффициент конвективной теплоотдачи, *g(t)* – переменная во времени температура окружающей среды. Решение задачи (8), (22)–(24) через функцию Грина примет вид

$$T(x,t)=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{p}}\int_0^{t}\frac{g(t)}{\sqrt{t-t}}H(x,t-t)dt+ \qquad (25)$$

$$+\int_0^{\infty}G(x,x,t)f(x)dx+\int_0^{\infty}G(x,x,t)\frac{q_{v_O}}{cr}e^{-yz}\,dz$$

где

$$G(x,x,t)=\frac{1}{2\sqrt{p\,at}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x)^2}{4at}\right]+\exp\left[-\frac{(x+x)^2}{4at}\right]\right\}-$$

$$-2a\int_0^{\infty}\exp\left[-\frac{(x+x+h)^2}{4at}-a\,h\right]dh\ ,$$

$$H(x,t)=\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)-a\int_0^{\infty}\exp\left[-\frac{(x+h)^2}{4at}-a\,h\right]dh\,.$$

Отметим, что полученные в статье расчетные зависимости по температурному полю строго применимы в условиях постоянства электрофизических и теплофизических свойств угольного вещества, либо в тех температурных интервалах, когда эти характеристики могут быть заменены константами.

Информация о температурном поле является базовой для определения терморазрушающих напряжений, оценки параметров СВЧ-зажигания угольного топлива, расчета максимальных температур вещества, поиска управляющих воздействий, при реализации оптимальных параметров технологии СВЧ-нагрева угольных массивов и других.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математические методы прикладной электродинамики. Коллективная монография. – М.: Радиотехника, 2007. – 188 с.

2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.

3. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979. – 224 с.

Работа выполнена при поддержке Федеральных целевых программ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», «Исследования и разработки по приоритетным направлениям научно-технологического комплекса России».

Саломатов Вл.В., *д.т.н., проф.,*
Саломатов Вас.В.,
Ин-т теплофизики СО РАН, Новосибирск,
тел. (8383)3165544, e-mail: vvs@itp.nsc.ru
Пащенко С.Э., *к.ф.-м.н.,*
ООО СВЧ, Новосибирск
Сладков С.О., *аспирант, НИ ТПУ, Томск*