

РАЗДЕЛ I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ СИНТЕЗА И АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Методы могут быть реализованы с помощью достаточно простых устройств, содержащих источник опорного напряжения, аналоговый ключ, два аналого-цифровых преобразователя и контроллер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Melentiev, V.S. Approximation methods of measuring the parameters of linear electric circuits / V.S. Melentiev // Measurement Techniques. - Springer New York, LCC. - 2011. - V 53, №10. - P. 1169-1173.
2. Мелентьев, В.С. Методы и средства раздельного определения параметров

двухэлементных двухполюсных электрических цепей / В.С. Мелентьев В.С., Е.В. Костенко // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. - 2009. - №2(10). - С. 102-112.

Зав. кафедрой, д.т.н., доцент **В.С. Мелентьев** – vs_mel@mail.ru; аспирант **Е.В. Костенко** – kelenav_7@mail.ru; аспирант **Д.А. Муронов** – mir_da@mail.ru - Самарский государственный технический университет, кафедра информационно-измерительной техники, ims@samgtu.ru, (486)337-05-45.

УДК 519.244

ЭЛЛИПСОИДЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ЭМПИРИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Е.М. Сесин, В.М. Белов

В данной работе рассмотрены вопросы оценивания параметров линейных эмпирических зависимостей, разработан блок алгоритмов оценивания параметров экспериментальных k -параметрических линейных зависимостей эллипсоидами неопределенности. Указанный блок алгоритмов является синтезом идей обобщенного метода центра неопределенности [1] и метода эллипсоидов [2].

Ключевые слова: обобщенный метод центра неопределенности, метод эллипсоидов.

Пусть в результате эксперимента получено n измерений и для каждого измерения получены данные в виде четверки значений $mid(x), rad(x), mid(y), rad(y), x, y \in IR$.

Пусть $0 \notin x_i, i = \overline{1, n}$ и при $i \neq j \ x_i \cap x_j = \emptyset, y_i \cap y_j = \emptyset$.

Пусть также задано число $k \in N, 2 \leq k \leq n$ - количество параметров искомой зависимости.

Необходимо оценить значения параметров линейной k -параметрической полиномиальной зависимости y от x , то есть найти коэффициенты $a_j \in IR$ полинома

$F(x, k) = \sum_{j=1}^k a_j x^{j-1}$ таким образом, чтобы

$y_i \subseteq F(x_i, k), i = \overline{1, n}$.

Для нахождения начального приближения необходимо найти внешнюю оценку объединенного множества решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k a_j x_1^{j-1} = y_1 \\ \sum_{j=1}^k a_j x_2^{j-1} = y_2 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^k a_j x_k^{j-1} = y_k \end{cases} \Rightarrow X \bar{a} = \bar{y},$$

где $X \in IR^k \otimes IR^k, \bar{a}, \bar{y} \in IR^k$.

Для этого, согласно [3], необходимо найти формальное решение ИСЛАУ $(I - X)\bar{a} - \bar{a} + \bar{y} = 0$. Для формального решения данной ИСЛАУ будем использовать субдифференциальный метод Ньютона.

Так как KR^k не является линейным метрическим пространством, то для применения большинства методов решения ИСЛАУ необходимо построить биективное отображение из KR^k в какое-либо линейное метрическое пространство, выполнить решение предложенным методом и применить к результату обратное отображение.

ЭЛЛИПСОИДЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ЭМПИРИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

В нашем случае такое биективное отображение существует, его называют погружением $sti: KR^k \mapsto R^{2k}$ и выполняют по

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k) \mapsto (-x_1^-, -x_2^-, \dots, -x_k^-, x_1^+, \dots, x_k^+).$$

Согласно [3], это отображение аддитивно и однородно, поэтому применяя отображение к векторам ИСЛАУ, получим индуцированную СЛАУ:

$$\begin{aligned} sti((\mathbf{I} - \mathbf{X})\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{y}}) = \\ sti((\mathbf{I} - \mathbf{X})sti^{-1}(a) - sti^{-1}(a) + \bar{\mathbf{y}}) = \\ = sti((\mathbf{I} - \mathbf{X})sti^{-1}(a)) - a + sti(\bar{\mathbf{y}}) = S(a) = 0. \end{aligned}$$

В [3] доказывают, что введенное таким образом индуцированное отображение $S: R^{2k} \mapsto R^{2k}$ непрерывно.

Введем некоторые необходимые понятия. Пусть евклидово пространство R^q упорядочено частичным порядком $\prec$. Отображение $F: R^p \mapsto R^q$ называют порядково выпуклым относительно $\prec$, если $F(\lambda u + (1-\lambda)v) \prec \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v)$,

$$\forall u, v \in R^p, \lambda \in [0, 1].$$

В [3] доказывают, что отображение $S: R^{2k} \mapsto R^{2k}$ является порядково выпуклым относительно покомпонентного порядка $\{a \ll b \mid \bar{a}, \bar{b} \in R^{2k}, a_i < b_i, i = \overline{1, 2k}\}$.

Пусть евклидово пространство R^q упорядочено частичным порядком $\ll$ и отображение $F: R^p \mapsto R^q$ порядково выпукло относительно $\ll$. Субдифференциалом отображения F в точке $x \in R^p$ называют множество, обозначаемое $\delta F(x)$, которое образовано всеми такими линейными операторами

$$D: R^p \mapsto R^q, \quad \text{что} \quad D(v) \ll F(x+v) - F(x), \quad \forall v \in R^p.$$

Элементы множества $\delta F(x)$ называют субградиентами отображения F в точке x . Если множество $\delta F(x)$ не пусто, то говорят, что отображение F субдифференцируемо в точке x .

В [3] доказывают, что отображение $S: R^{2k} \mapsto R^{2k}$ субдифференцируемо в каждой точке. Исходя из этого, можно применять модифицированный метод Ньютона, в котором вместо дифференциала используют субдифференциал.

Алгоритм субдифференциального метода Ньютона: Выбираем некоторое начальное

приближение $x^{(0)} \in R^{2k}$, если $(k-1)$ -ое приближение уже найдено, то вычисляем какой-либо субградиент $D^{(k-1)}$ отображения S в точке $x^{(k-1)}$ и полагаем $x^{(k)} = x^{(k-1)} - \tau(D^{(k-1)})^{-1}S(x^{(k-1)})$, где $\tau \in (0, 1]$ - параметр релаксации.

В [3] доказана сходимость метода к точному решению при $\tau = 1$ для широкого класса задач, а также сходимость метода при $\tau \leq 1$ к некоторому приближенному решению для любых задач. Также в [3] приводят формулы для вычисления субдифференциала отображения S в любой точке.

В качестве начального приближения $x^{(0)}$, можно взять решение системы $mid((\mathbf{I} - \mathbf{X})\bar{\mathbf{a}}) - mid(\bar{\mathbf{a}}) + mid(\bar{\mathbf{y}}) = 0$, которое получают, например, методом Гаусса с выбором главного элемента.

Таким образом, применяя субдифференциальный метод Ньютона к индуцированной СЛАУ и возвращаясь при помощи обратного отображения sti^{-1} в интервальное пространство, получаем вектор $\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$.

Необходимо также отметить, что вектор $\bar{\mathbf{a}}$ в общем случае принадлежит KR^k и может не принадлежать IR^k , поэтому для получения верного результата к вектору $\bar{\mathbf{a}}$ необходимо применить следующую операцию

$$rig(\bar{\mathbf{a}}) = \begin{cases} [a_i^-, a_i^+], & a_i^- \leq a_i^+, \\ [a_i^+, a_i^-], & a_i^- > a_i^+, \end{cases} \quad i = \overline{1, k}, \quad \text{результат}$$

которой принадлежит IR^k и является, таким образом, начальным приближением.

Интервальный вектор $\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$, полученный на предыдущем шаге, можно рассматривать не только как элемент пространства IR^k , но и как прямоугольный параллелепипед с параллельными базису пространства R^k ребрами:

$$\begin{aligned} P = P(mid(\bar{\mathbf{a}}), rad(\bar{\mathbf{a}})) = \\ \{[mid(a_1) - rad(a_1), mid(a_1) + rad(a_1)] \otimes \dots \otimes \\ \otimes [mid(a_k) - rad(a_k), mid(a_k) + rad(a_k)]\}. \end{aligned}$$

Назовем P множеством неопределенности начального приближения. Рассмотрим теперь результат m -того измерения, где $k < m \leq n$.

В пространстве параметров R^k результат измерения, согласно [4], представляет собой пару открытых множеств, заключенных

РАЗДЕЛ I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ СИНТЕЗА И АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

между двумя параллельными гиперплоскостями:

$$Pl_m^- = \left\{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in IR \mid y_m^- \leq \sum_{j=1}^k a_j (x_m^-)^{j-1} \leq y_m^+ \right\} \quad \text{и}$$

$$Pl_m^+ = \left\{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in IR \mid y_m^- \leq \sum_{j=1}^k a_j (x_m^+)^{j-1} \leq y_m^+ \right\},$$

где a_j - j -тая координата центра рассматриваемого множества неопределенности A . Назовем эти множества полосами.

В качестве уточненного решения с учетом m -того измерения необходимо взять максимальное по объему пересечение полосы с рассматриваемым множеством неопределенности A . Проблема состоит в том, что уже после первого пересечения множество A в общем случае представляет собой достаточно сложное выпуклое тело, и вести с ним прямые расчеты весьма сложно. Поэтому целесообразно выбрать в качестве оценивающего тела для множества A k -мерный эллипсоид:

$$E^k(\bar{a}, Q) = \{ \bar{x} \in R^k \mid (Q^{-1}(\bar{x} - \bar{a}), \bar{x} - \bar{a}) \leq 1 \},$$

где $Q \in R^k \otimes R^k$ - симметричная положительно определенная характеристическая матрица, а $\bar{a} \in R^k$ - центр эллипсоида.

Таким образом, задачу уточнения сводят к:

1. Внешней оценке множества неопределенности начального приближения P эллипсоидом минимального объема.
2. Внешней оценке пересечения эллипсоида и полосы эллипсоидом минимального объема.
3. Внешней оценке эллипсоида параллелепипедом с параллельными базису ребрами минимального объема для получения интервальных оценок решения задачи на последнем шаге.

Рассмотрим каждый из пунктов более подробно.

Эллипсоидом минимального объема для параллелепипеда начального приближения P является описанный эллипсоид. В данной работе была сформулирована и доказана следующая

Теорема 1: Для параллелепипеда начального приближения $P(\bar{c}, \bar{r})$ описанный эллипсоид имеет вид $E(\bar{c}, Q)$, где

$$Q = \begin{bmatrix} kr_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & kr_2^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & kr_k^2 \end{bmatrix} = \text{diag}(kr_i^2, i = \overline{1, k}).$$

Доказательство:

Рассмотрим аффинное преобразование

$\bar{y} = A\bar{x} + \bar{b}$, переводящее параллелепипед $P(\bar{c}, \bar{r})$ в k -мерный куб $P(\bar{O}, \bar{1})$, где $\bar{1} = (1, 1, \dots, 1)$. Искомый описанный эллипсоид переходит при таком преобразовании в описанную вокруг куба сферу $E(\bar{O}, Q_S)$. Найдем параметры этого преобразования.

Для этого сначала необходимо найти формулу результата действия преобразования $\bar{y} = A\bar{x} + \bar{b}$ на параллелепипед $P(\bar{c}, \bar{r})$. Заметим, что, так как соответствующие друг другу ребра параллелепипеда P параллельны ребрам куба, то аффинное преобразование есть сжатие (или растяжение) и/или сдвиг, и матрица $A = \text{diag}(a_i, i = \overline{1, k})$. Выразим $\bar{x} = A^{-1}(\bar{y} - \bar{b})$ и подставим в уравнение $\bar{x} \in P(\bar{c}, \bar{r})$, получим

$$A^{-1}(\bar{y} - \bar{b}) \in P(\bar{c}, \bar{r}) \Leftrightarrow A^{-1}\bar{y} - A^{-1}\bar{b} \in P(\bar{c}, \bar{r})$$

. Так как матрица A диагональна, то

$$A^{-1}\bar{y} = \left(\frac{y_1}{a_1}, \frac{y_2}{a_2}, \dots, \frac{y_k}{a_k} \right) \quad \text{и}$$

$$A^{-1}\bar{b} = \left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_k}{a_k} \right), \quad \text{поэтому}$$

$$\left(\frac{y_1}{a_1}, \frac{y_2}{a_2}, \dots, \frac{y_k}{a_k} \right) - \left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_k}{a_k} \right) \in$$

$$[c_1 - r_1, c_1 + r_1] \otimes \dots \otimes [c_k - r_k, c_k + r_k] \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y_1}{a_1}, \frac{y_2}{a_2}, \dots, \frac{y_k}{a_k} \right) \in \left[c_1 + \frac{b_1}{a_1} - r_1, c_1 + \frac{b_1}{a_1} + r_1 \right] \otimes \dots$$

$$\otimes \left[c_k + \frac{b_k}{a_k} - r_k, c_k + \frac{b_k}{a_k} + r_k \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{y} \in [(a_1 c_1 + b_1) - a_1 r_1, (a_1 c_1 + b_1) + a_1 r_1] \otimes \dots$$

$$\otimes [(a_k c_k + b_k) - a_k r_k, (a_k c_k + b_k) + a_k r_k] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{y} \in P(A\bar{c} + \bar{b}, A\bar{r}).$$

Теперь необходимо найти параметры A и $\bar{b}$ преобразования $P(\bar{c}, \bar{r}) \rightarrow P(\bar{O}, \bar{1})$.

ЭЛЛИПСОИДЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ЭМПИРИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Имеем $A\bar{c} + \bar{b} = \bar{O}$, $A\bar{r} = \bar{1}$, отсюда

$$A = \text{diag}\left(\frac{1}{r_i}, i = \overline{1, k}\right), b_i = -\frac{c_i}{r_i}, i = \overline{1, k}.$$

Обратное преобразование $\bar{y} = C\bar{x} + \bar{d}$ имеет параметры:

$$C = A^{-1} = \text{diag}(r_i, i = \overline{1, k}),$$

$$d_i = -A^{-1}b_i = c_i, i = \overline{1, k}.$$

Теперь найдем параметры описанного эллипсоида для куба $P(\bar{O}, \bar{1})$. Таким эллипсоидом является описанная сфера $E(\bar{O}, Q_s)$. Согласно [1], для сферы матрица Q_s имеет вид $Q_s = \text{diag}(r^2)$. Радиус описанной сферы для куба $P(\bar{O}, \bar{1})$ равен $r = \|\bar{1}\| = \sqrt{k}$, поэтому

$$Q_s = \text{diag}(q_i = k, i = \overline{1, k}).$$

Согласно [1], аффинное преобразование $\bar{y} = A\bar{x} + \bar{b}$ преобразует эллипсоид $E(\bar{g}, Q)$ в эллипсоид $E(A\bar{g} + \bar{b}, AQA^T)$. Применим обратное преобразование к кубу $P(\bar{O}, \bar{1})$ и сфере $E(\bar{O}, Q_s)$, получим параллелепипед $P(\bar{c}, \bar{r})$ и эллипсоид $E(C\bar{O} + \bar{c}, CQ_sC^T) = E(\bar{c}, Q)$,

$$Q = \text{diag}(r_i, i = \overline{1, k}) \times \text{diag}(q_i = k, i = \overline{1, k}) \times$$

$$\text{diag}(r_i, i = \overline{1, k}) = \text{diag}(kr_i^2, i = \overline{1, k}).$$

Теорема доказана.

Определение полосы, данное выше, можно переписать в виде $Pl^- = \{\bar{a} \in R^k, \mathbf{y} \in IR^k \mid y^- \leq (\bar{a}, \bar{n}^-) \leq y^+\}$ и $Pl^+ = \{\bar{a} \in R^k, \mathbf{y} \in IR^k \mid y^- \leq (\bar{a}, \bar{n}^+) \leq y^+\}$,

где $\bar{n}^- = (1, (x^-), (x^-)^2, \dots, (x^-)^{k-1}), \mathbf{x} \in IR^k$ и $\bar{n}^+ = (1, (x^+), (x^+)^2, \dots, (x^+)^{k-1}), \mathbf{x} \in IR^k$ – векторы нормали к плоскостям соответствующей полосы. Заметим, что в таком виде неравенства, задающие полосы, неудобны для расчетов, так как векторы нормали не нормированы, поэтому прежде чем переходить к дальнейшим расчетам, неравенства следует разделить на норму соответствующего вектора нормали.

Теперь задача принимает вид: найти оптимальную эллипсоидальную оценку пересечения эллипсоида $E^k(\bar{a}, Q)$ с полосой

$$Pl = \{\bar{a} \in R^k, \mathbf{y} \in IR^k \mid y^- \leq (\bar{a}, \bar{n}) \leq y^+, \|\bar{n}\| = 1\}$$

Е.М. СЕСИН, В.М. БЕЛОВ

Согласно [1], решением такой задачи является эллипсоид

$$E_{Pl}^k = \{\bar{x} \in R^k \mid (Q_{Pl}^{-1}(\bar{x} - \bar{a}_{Pl}), \bar{x} - \bar{a}_{Pl}) \leq 1\} \quad \text{с}$$

параметрами: $\bar{a}_{Pl} = \bar{a} + \frac{\varepsilon Q\bar{n}}{\sqrt{(Q\bar{n}, \bar{n})}}$,

$$Q_{Pl}^{-1} = \frac{A^2 - B^2}{(Q\bar{n}, \bar{n})}(\bar{n} \bullet \bar{n}) + -B^2 Q^{-1},$$

$$c^- = \max\left(-1, \frac{y^- - (\bar{a}, \bar{n})}{\sqrt{(Q\bar{n}, \bar{n})}}\right),$$

$$c^+ = \min\left(1, \frac{y^+ - (\bar{a}, \bar{n})}{\sqrt{(Q\bar{n}, \bar{n})}}\right).$$

Если $kc^-c^+ + 1 > 0$, то

$$t = (c^-)^2 + (c^+)^2 + 2, r = (c^+)^2 - (c^-)^2,$$

$$s = (c^- + c^+)^2,$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{t + \sqrt{t^2 + (k^2 - 1)r^2}}{(k+1)s}}$$

$$\phi = \lambda^4 s - 2\lambda^2 t + (c^+ - c^-)^2,$$

$$A = 0.5\sqrt{\phi}, B = A/\lambda$$

$$\varepsilon = 0.5(c^+ + c^-)(1 - \lambda^2).$$

Иначе, $A = B = 1, \varepsilon = 0$.

Под операцией $(\bar{a} \bullet \bar{b})$ следует понимать диадное произведение, результатом которого является матрица

$$N = \{n_{ij}, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k} \mid n_{ij} = a_i b_j\}.$$

В [1] также доказывают оптимальность полученного таким образом эллипсоида. Заметим, что если полоса не пересекает эллипсоид ($c^- < -1$ или $c^+ > 1$), то измерение, которому она соответствует, является противоречивым и не участвует в дальнейших расчетах.

Объем эллипсоида $E^k(\bar{a}, Q)$ равный,

$$\text{согласно [1], } \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} \sqrt{\det(Q)} \text{ пропорциона-}$$

лен $\det(Q)$, поэтому можно сравнивать объемы эллипсоидов, вычисляя только $\det(Q)$.

Параллелепипедом минимального объема с параллельными базису ребрами для эллипсоида будет описанный параллелепипед. Согласно [1], длина ребер такого параллелепипеда, параллельных i -тому вектору базиса составляет $2\sqrt{Q_{ii}}$.

РАЗДЕЛ I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ СИНТЕЗА И АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Таким образом, интервальный вектор $\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$, являющийся решением задачи, получают из эллипсоида $E_n^k = \{\bar{\mathbf{x}} \in R^k \mid (Q_n^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{a}}_n), \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{a}}_n) \leq 1\}$

по следующей формуле:

$$\mathbf{a}_i = [(\bar{\mathbf{a}}_n)_i - \sqrt{(Q_n)_{ii}}, (\bar{\mathbf{a}}_n)_i + \sqrt{(Q_n)_{ii}}], i = \overline{1, k}$$

Дальнейшее развитие предусматривает улучшение алгоритмов за счет учета не только граничных значений интервала неопределенности независимой переменной, но и всего диапазона значений указанного интервала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О.И. Хомутов Оценивание параметров эмпирических зависимостей обобщенным методом центра неопределенности / О.И. Хомутов, В.М. Белов, С.А. Гончаров, Е.В.

- Рябова; АлтГТУ им. И.И. Ползунова. – Барнаул: изд-во АлтГТУ, 2006. – 147с.
2. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. – Москва: Наука, 1988. – 321 с.
3. С.П. Шарый Конечномерный интервальный анализ. - М.: Новое знание, 2008. - 726с.
4. В.М. Белов, Ф.Г. Унгер, Ю.А. Карбаинов, В.И. Пролубников, Н.П. Тубалов Оценивание параметров эмпирических зависимостей методом центра неопределенности. – Новосибирск: Наука, 2001. – 176 с.

Аспирант **Е.М. Сесин** тел. (923) 644-88-42, e.m.sesin@gmail.com; д.т.н. **В.М. Белов** тел. (383) 269-83-28, vmbelov@mail.ru – кафедра «Безопасность и управление в телекоммуникациях» Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики