

ОБЩАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМ ЭНЕРГООБЕСПЕЧЕНИЯ СЕЛЬСКИХ ЗДАНИЙ

О.В. Шеповалова

В статье рассмотрено построение общей математической модели систем энергообеспечения сельских зданий как сложных многомерных многофакторных систем. Описаны целевая функция, оптимальная стратегия, задача максимального энергосбережения и задача минимизации потребления энергоресурсов. Рассмотрено моделирование состояния отдельных параметров КСЭО для определения влияния их значений на КСЭО и взаимовлияния.

Ключевые слова: математическая модель, целевая функция, комплексные системы энергообеспечения, многомерный анализ, динамическое программирование, взаимосвязь и взаимовлияние параметров подсистем.

Сложность создания, прогнозирования и обеспечения требуемой эффективности комплексных систем энергообеспечения (КСЭО) как иерархических систем высшего порядка требует общих упрощенных описаний с помощью символических моделей. Модели должны с достаточной степенью достоверности определять как условия для достижения эффективности, так и поведение созданной системы в любой ситуации, устанавливать гипотетические, заданные правила, связывающие все элементы внутри КСЭО как в статике (конструктивно), так и динамике (при функционировании; при изготовлении, испытаниях, монтаже), и внешние воздействия. Этим требованиям в наибольшей степени удовлетворяет математическое моделирование.

При создании модели использованы методы линейного и динамического программирования, многомерного анализа. В общем случае задачу создания системы можно рассматривать как функцию, в том числе случайных величин. В связи с этим в качестве меры качества использована средняя характеристика возможных результатов. Так как конечной целью проводимых работ является прикладное применение разрабатываемой модели, применение для конкретных случаев, группы случаев, то для описания подсистем был использован дисперсионный анализ. Для простоты решения задачи с достаточно степенью достоверности применение дисперсионного анализа формулируется в терминах общей линейной модели.

Комплексная система энергообеспечения сельского здания (КСЭО) – совокупность подсистем, конструкций, элементов, технических средств, деталей и узлов, обладающих конструктивной, параметрической, информационной, программной и эксплуатационной

совместимостью и обеспечивающих реализацию энергообеспечения. Система есть совокупность подсистем. Под элементом системы понимается подсистема. Всякую совокупность конструктивных и пр. элементов, характеризующихся условно независимым набором параметров, функционирующую и дающую некий результат, являющийся законченным для потребителя, будем называть подсистемой КСЭО. При этом каждая отдельно взятая подсистема функционирует в общем случае не достаточно эффективно относительно общего результата функционирования системы. Принимаем, что любое устройство, техническое средство, мероприятие, участвующее в энергообеспечении является элементом (составляющей) одной из подсистем. Подсистемы организуются по функциональному признаку. Задача найти такое сочетание и взаимодействие подсистем, состава подсистем и параметров, когда общая эффективность системы максимальна, система функционирует максимально эффективно.

Системы энергообеспечения имеют иерархическую многоуровневую структуру, и КСЭО можно рассматривать как многомерное пространство с многомерными параметрическими подпространствами подсистем. Причем, если КСЭО n -мерное пространство, то входящие в него (составляющие его) подпространства m -мерные, с множеством параметров, характеризующих подсистемы, и $m \leq n - 1$. Пересечение подпространств дает общие параметры, характеризующие КСЭО.

Каждый элемент подсистем $ПС^k$, характеризуется значениями многих параметров p_i^k в данный момент времени t_i . Часть из них является внутренними, часть входными и часть внешними параметрами. Важно одно-

временно с описанием множества параметров включение множества реакций – вероятностных величин, учет изменения которых и позволяет обеспечить управление. Иначе, можно сказать, что степень учета множества реакций определяет степень управляемости (управления) системы.

Таким образом, в описании КСЭО мы имеем множество параметров I-го и II-го рода. Множество параметров I – статическое множество параметров, характеризующее состояние системы в любой момент времени t_i . Множество параметров II – обобщенная характеристика, описание, включающее параметры как функционалы для определения параметров множества I в любой момент времени.

Т.о. КСЭО – совокупность подсистем $\mathbf{ПС}^k$, каждая из которых может быть в общем случае описана функционалом $\mathbf{ПС}^k = \mathbf{F}^k(\mathbf{r}^k)$, и состояние каждой подсистемы может в момент времени t_i может быть представлено

$$f_i^k = (p_{ij}^k) = f_i^k(p_{i1}^k, p_{i2}^k, \dots, p_{in_k}^k) ,$$

где p_{ij}^k – j-тый параметр подсистемы k в i-тый момент времени; $j = 1, 2, \dots, n_k$; $i = 0, 1, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots$.

Комплексную систему энергообеспечения $\mathbf{С}$ можно описать как

$$\mathbf{С} \equiv \bigcup_{k=1} \mathbf{ПС}^k \equiv \left\{ \left(\begin{array}{c} \mathbf{p}_1^k \\ \mathbf{p}_2^k \\ \mathbf{U}^k \\ f^k(S_i^k) \\ \mathbf{V}^k \end{array} \right) \right\} \equiv \{\mathbf{p}\} ,$$

где $\mathbf{p}_1^k$ – множество внутренних параметров подсистемы $\mathbf{ПС}^k$;

$\mathbf{p}_2^k$ – множество параметров влияния подсистемы $\mathbf{ПС}^k$; и $\mathbf{p}_1^k \cup \mathbf{p}_2^k = \mathbf{p}^k$ – множество параметров подсистемы $\mathbf{ПС}^k$;

$\mathbf{U}^k$ – множество управляющих воздействий (управлений);

$f^k(S_i^k)$ – множество функций перехода подсистемы из одного состояния S_i^k в другое;

$\mathbf{V}^k$ – множество внешних условий;

$\mathbf{p}$ – множество параметров системы.

Задача системы есть совокупность задач подсистем. При этом в задачу конкретной подсистемы в качестве ограничений входят условия оптимизации других подсистем и системы в целом и т.о. учитывается взаимовлияние подсистем.

В общем случае энергосбережение может быть рассмотрено как часть энергоэффективности. Однако современное состояние проблемы энергообеспечения и расширение понятия систем энергообеспечения требует выделения энергосбережения как отдельного определяющего критерия оптимальности системы.

Т.о. критерий оптимальности

$$W \equiv [W_1 \rightarrow \max; W_2 \rightarrow \min] ,$$

где W_1 – критерий энергоэффективности, W_2 – критерий энергопотребления (энергосбережения).

Задача сводится к: 1) выбору необходимых и достаточных параметров для реализации целевой функции; 2) определению значений и взаимосвязей параметров с достаточной степенью достоверности.

Иначе, задача состоит в определении / управляющих переменных (управления) $u_i = u_i(t)$, $k = 1, 2, \dots, r$ как функции от времени t в интервале $t_0 \leq t \leq t_F$, минимизирующих критерий энергопотребления и максимизирующих критерий энергоэффективности:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0(t_F) = \\ = \int_{t_0}^{t_F} f_0(p_1, p_2, \dots, p_n; u_1, u_2, \dots, u_r) \Big|_{\substack{W_2 \rightarrow \min \\ W_1 \rightarrow \max}} \end{aligned}$$

и удовлетворяющих неравенствам $Q_i(u_1, u_2, \dots, u_r) \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$), определяющим замкнутое множество допустимых управлений $\mathbf{U}$ [1].

Уравнение состояния

$$S_i = \frac{dp_i}{dt} = f_i(p_1, p_2, \dots, p_n; u_1, u_2, \dots, u_r)$$

и

$$W = \sum_{i=1}^n g_i(S_i, U_i) \Big|_{\substack{W_1 \rightarrow \max \\ W_2 \rightarrow \min}} \mathbf{V}^k$$

Рассмотрим задачу математического моделирования КСЭО как задачу определения экстремума целевой функции переменных $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j , \quad (1)$$

при следующих ограничениях, наложенных на переменные (запись в векторной форме):

$$\sum_{j=1}^n A_j x_j \leq \mathbf{B}_j , \quad x_n \geq 0 , \quad k \leq n$$

ОБЩАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМ ЭНЕРГООБЕСПЕЧЕНИЯ СЕЛЬСКИХ ЗДАНИЙ

где $\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ – j-й вектор-столбец условий

функционирования КСЭО; $\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ –

вектор-столбец ограничений функционирования КСЭО.

$\mathbf{X}$ определяется некоторой совокупностью параметров системы $\mathbf{p}$ и подсистемы (единичного процесса) $\mathbf{p}^k$:

$$\mathbf{X}_j \equiv \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_i^1 \\ \vdots \\ p_i^m \end{Bmatrix} \text{ и } \mathbf{p} = \mathbf{p}^1 \cap \mathbf{p}^2 \cap \dots \cap \mathbf{p}^k \dots$$

Векторы $\mathbf{A}_j$ в совокупности образуют матрицу $\mathbf{A} = \|\mathbf{A}_j\|$ условий функционирования. Вектор $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе условий (1), является планом рассматриваемой задачи. Каждый план определяет соответствующее значение функции L . Решение задачи или оптимальный план, определяющий экстремум линейной формы $L(x_1, \dots, x_n)$:

$$\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*).$$

План будет оптимальным, если $L(\mathbf{X}^*) \geq L(\mathbf{X})$. При минимизации линейной формы знак неравенства изменится на противоположный.

Сложность решения задачи математического моделирования взаимосвязи параметров КСЭО состоит в том, что прямой путь решения – построение системы возможных вариантов и выделение из них оптимального – практически не осуществим из-за необходимости выполнения большого количества операций. Упорядочим поиск оптимального решения, не прибегая к перебору всех возможных вариантов. Для задачи моделирования КСЭО построим определенным образом некоторую другую задачу, называемую двойственной [2].

Для исходной прямой задачи, формулируемой как

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m; \\ \max L_1(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{j=1}^n c_jx_j, \quad x_j \geq 0, \end{aligned}$$

имеем соответствующую двойственную задачу:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \geq c_j, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\min L_2(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m b_iy_i, \quad y_i \geq 0,$$

Прямую задачу можно рассматривать как задачу максимального энергосбережения, а двойственную – как задачу минимизации потребления энергоресурсов.

Что в итоге дает единую модель снижения энергопотребления. Т.о.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \max L_1(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{j=1}^n c_jx_j, \quad x_j \geq 0 \end{aligned} \right\} \cup \quad (2)$$

$$\cup \left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i &\leq c_j, \quad j = 1, \dots, n \\ \min L_2(y_1, \dots, y_m) &= \sum_{i=1}^m b_iy_i, \quad y_i \geq 0 \end{aligned} \right.$$

есть искомое обобщенное описание.

Т.к. если одна из задач двойственной пары (2) имеет решение, то другая также разрешима, то при любых оптимальных планах для этих двух задач $\mathbf{X}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ и $\mathbf{Y}^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^n c_jx_j^* = \sum_{i=1}^m b_iy_i^*.$$

Используя метод динамического программирования, можно представить исследуемую задачу в виде ряда последовательных этапов или шагов. Тогда на каждом шаге выбирается такой вариант, чтобы выбранная последовательность вариантов была наилучшей с точки зрения заданного критерия оценки функционирования КСЭО. При этом критерий оценки и есть совокупность требуемых параметров – соответствие техническим требованиям.

Если система в рассматриваемый момент времени находится в некотором состоянии, то ее поведение в дальнейшем определяется этим состоянием и выбираемым управлением, но не зависит от того, в каких состояниях система находилась до этого момента.

Если теперь представить КСЭО как некоторое множество или пространство S , в котором точки p^m – совокупность параметров, описывающая систему в данный момент времени t_i , являются точками этого пространства и некоторую функцию $P(p)$ – преобразование данного множества в себя, то $p = P(p) \in S$ для любых $p \in S$. [3]

Бесконечная последовательность векторов $[p_0, p_1, \dots, p_n]$, где $p_{n+1} = P(p_n)$, является бесконечным шаговым процессом $pP(p)$. p_0 изображает начальное состояние системы, а $p_1 = P(p_0)$ – состояние на одну единицу времени позднее и т.д., т.е. представленная последовательность есть состояния системы, наблюдаемые в дискретные моменты времени.

Расширив это понятие, полагая, что P зависит от другого вектора q : $P = (p, q)$, мы можем оказать достаточное влияние на процесс. На каждом i -м шаге можем выбирать значение q_i из набора допустимых векторов $C(q)$, т.е.

$$\begin{aligned} p_1 &= P(p_0, q_0); \\ p_2 &= P(p_1, q_1); \\ &\dots \dots \dots \\ p_{n+1} &= P(p_n, q_n). \end{aligned}$$

Здесь вектор q_i – вектор решения или переменного решения, а выбор q_i – решение. Для КСЭО q_i выбирается так, чтобы максимизировать предписанную скалярную функцию состояния и переменного решения (функцию критерия)

$$R(p_0, p_1, \dots; q_0, q_1, \dots)$$

Многошаговый (N-шаговый) процесс принятия решения (дискретного детерминантного типа) есть последовательность векторов $[p_0, p_1, \dots, p_N; q_0, q_1, \dots, q_N]$, где $p_{n+1} = P(p_n, q_n)$ для любого n .

Величины q_k выбираются способом, который ввиду общего характера функции R зависит от текущего состояния системы, прошлого и будущего состояний, а так же от прошлого и будущего решений.

Критерий R обладает структурой, позволяющей сосредоточить внимание лишь на прошлой и текущей истории процесса при поиске величины q . При этом функция стратегии

$$g_k = g_k(p_0, p_1, \dots, p_k; q_0, q_1, \dots, q_{k-1}).$$

Оптимальная стратегия – стратегия, максимизирующая функцию R .

Вид оптимальной стратегии определяется информацией о состояниях системы, которой располагаем или которую используем для формирования стратегии.

Некоторое количество важных критериев обладает характерным свойством разъединения прошлого и настоящего, например,

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{k=0}^N g(p_k, q_k); \\ &g(p_N) \\ &\max_{k \geq 0} g(p_k, q_k)^* \end{aligned} \right\}$$

Для описания КСЭО формулировка процессов принятия решений позволяет ограничиться рассмотрением стратегий, зависящих только от текущего состояния.

Если теперь рассмотреть задачу максимизации функции энергосбережения как

$$R(p_0, p_1, \dots, p_k; q_0, q_1, \dots, q_{k-1}) = \sum_{k=0}^N g(p_k, q_k)$$

и если $f_N(p_0)$ – максимальное значение R , зависящее только от первоначального состояния p_0 и числа шагов N , всех параметров, то $f_N(p_0)$ равно общему N -шаговому энергосбережению при начальном состоянии p_0 , получаемому при оптимальной стратегии.

Из принципа оптимальности для любого начального решения q_0 и $N \geq 1$, если $q_1, \dots, q_N$ выбраны правильно, то

$$\begin{aligned} g(p_0, q_0) &= [g(p_1, q_1) + \dots + g(p_N, q_N)] = \\ &= g(p_0, q_0) + f_N[p(p_0, q_0)] \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы найти максимальное энергосбережение $f_N(p_0)$, необходимо найти максимум (3) по q_0 , т.к. (3) справедливо для любого начального решения q_0 .

Отсюда получаются основные рекуррентные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} f_N(p_0) &= \max \left\{ \begin{aligned} &g(p_0, q_0) + \\ &+ f_{N-1}[P(p_0, q_0)] \end{aligned} \right\}, N \geq 1 \\ f_0(p_0) &= \max_{q_0} g(p_0, q_0) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Теперь рассмотрим моделирование состояния отдельных параметров КСЭО для определения влияния их значений на КСЭО и взаимовлияния.

С достаточной степенью достоверности все ситуации, описывающие состояние и взаимосвязь отдельных параметров КСЭО можно описать нормальной линейной моделью.

ОБЩАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМ ЭНЕРГООБЕСПЕЧЕНИЯ СЕЛЬСКИХ ЗДАНИЙ

Если КСЭО состоит из K подсистем, то в k -й подсистеме $s_k (k = 1, \dots, K)$ наблюдений

(состояний) параметров и $\sum_{k=1}^K s_k = s$. Если состояние величины параметров подсистемы i отличаются только математическим ожиданием, то это можно записать соотношениями

$$y_{kq} = P_k + \varepsilon_{kq}, \quad k = 1, \dots, K, \quad q = 1, \dots, s_k,$$

которые в терминах общей модели переписываются в виде

$$y = XP + \varepsilon,$$

где

$$y_{(s \times 1)} = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1s_1} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2s_2} \\ \vdots \\ y_{k1} \\ \vdots \\ y_{ks_K} \end{pmatrix}, \quad P_{(K \times 1)} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_K \end{pmatrix}$$

и

$$X_{(K \times 1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\} s_1 \text{ строк} \\ \left. \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\} s_2 \text{ строк} \\ \left. \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\} s_3 \text{ строк} \\ \vdots \\ \left. \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\} s_K \text{ строк} \end{matrix}$$

Здесь равные нулю элементы матрицы X опущены. Далее получим

$$X'X = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & s_K \end{pmatrix},$$

так что анализ ортогонален.

Далее

$$X'y = \begin{pmatrix} \sum_q y_{1q} \\ \sum_q y_{2q} \\ \vdots \\ \sum_q y_{kq} \end{pmatrix},$$

так, что НК-оценка (НК – наименьшие квадраты) параметра P есть

$$(X'X)^{-1}X'y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_K \end{pmatrix},$$

где $y_k = \sum_{q=1}^{s_k} y_{kq}/s_k$ – среднее арифметическое состояний параметра в i -й подсистеме. Наконец,

$$X\hat{P} = \begin{pmatrix} y_{1\cdot} \\ \vdots \\ y_{1\cdot} \\ y_{2\cdot} \\ \vdots \\ y_{2\cdot} \\ \vdots \\ y_{K\cdot} \\ \vdots \\ y_{K\cdot} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} y_{1\cdot} \\ \vdots \\ y_{1\cdot} \end{matrix} \right\} s_1 \text{ строк} \\ \left. \begin{matrix} y_{2\cdot} \\ \vdots \\ y_{2\cdot} \end{matrix} \right\} s_2 \text{ строк} \\ \vdots \\ \left. \begin{matrix} y_{K\cdot} \\ \vdots \\ y_{K\cdot} \end{matrix} \right\} s_K \text{ строк} \end{matrix},$$

точка в качестве индекса указывает на усреднение.

Оценкой параметра P по методу наименьших квадратов является просто полное выборочное среднее

$$\hat{P} = y_{\cdot\cdot} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K \sum_{q=1}^{s_k} y_{kq} = \frac{1}{n} \sum_k s_k y_k$$

Для модели КСЭО согласно [4] остаточная сумма квадратов (СК) равна

$$S_R = y'y - S_1 = \sum_{k=1}^K \sum_{q=1}^{s_k} y_{kq}^2 - \sum_{k=1}^K s_k y_{k\cdot}^2 \\ \equiv \sum_k \sum_q (y_{kq} - y_k)^2,$$

и S_2 и S_R можно переписать в виде

$$S_2 = \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{(\sum_{q=1}^{s_k} y_{kq})^2}{s_k} - \frac{(\sum_k \sum_q y_{kq})^2}{s} \right\} \\ S_R = \sum_k \sum_q y_{kq}^2 - \sum_k \frac{(\sum_q y_{kq})^2}{s_k}$$

Здесь S_1 – величина СК, обусловленная "подгонкой" модели, S_2 – СК, соответствующая оставшимся ограничениям.

Состояние системы (подсистемы) в момент времени t_i представляет собой состояние k подсистем (l параметров), выраженное

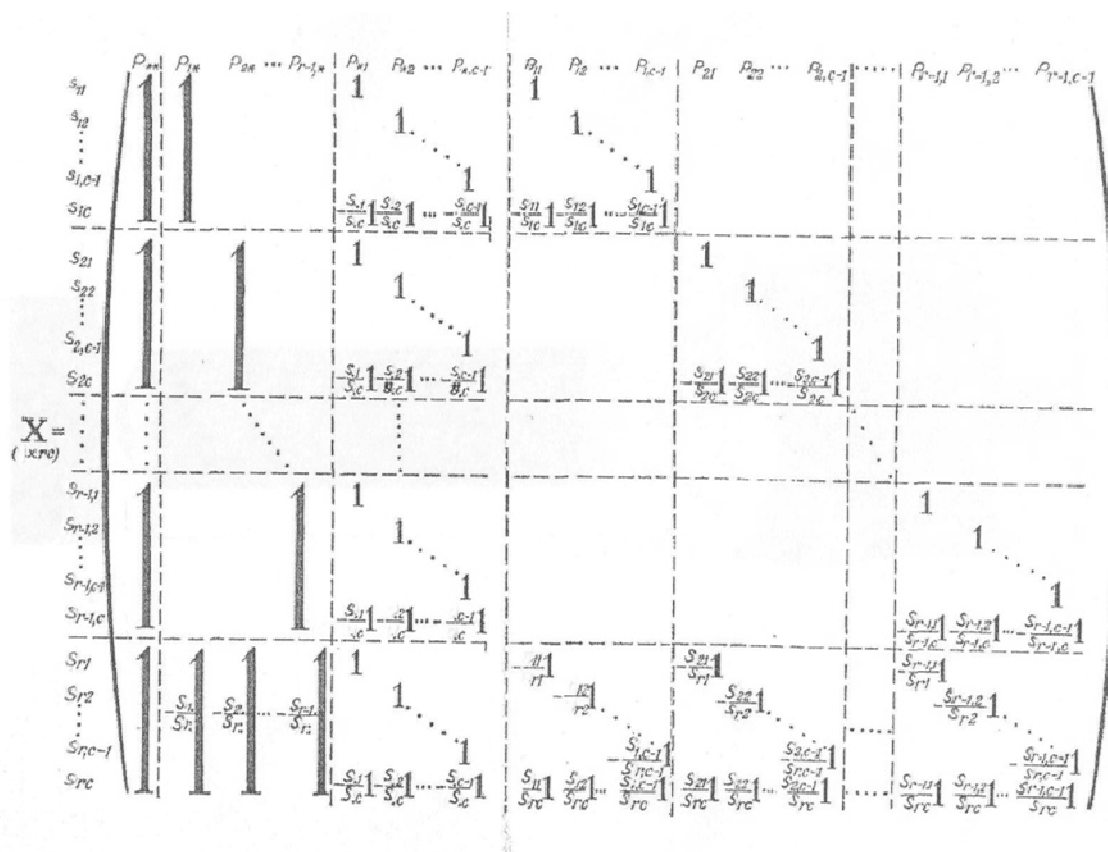


Рисунок 1 – Матрица состояний и взаимовлияния систем энергообеспечения сельских зданий

величинами параметров и соответствующее состояние взаимосвязей. Учитывая (2) и (4), матрица состояний и взаимовлияния запишется в виде, приведенном на рисунке 1.

Выводы

Рассмотрено построение общей математической модели систем энергообеспечения сельских зданий как сложных многомерных многофакторных систем. Описаны целевая функция, оптимальная стратегия, задача максимального энергосбережения и задача минимизации потребления энергоресурсов. Задача представлена в виде ряда последовательных этапов, описаны функции решения, состояния, стратегии и получены основные рекуррентные соотношения. Рассмотрено моделирование состояния отдельных параметров КСЭО для определения влияния их значений на КСЭО и взаимовлияния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн // – М.: Наука, 1974, – 832с.
2. Бусленко, Н.П. Теория больших систем / Н.П. Бусленко // – М.: Наука, 1969. – 318с.
3. Шаракшанэ, А.С. Сложные системы / А.С. Шаракшанэ, И.Г. Железнов, В.А. Иваницкий // – М.: Высшая школа, 1977. – 247с.
4. Кендалл, М. Многомерный статистический анализ и временные ряды / М. Кендалл, А. Стьюарт // – М.: Наука.-1976. - 736с.

Шеповалова О.В., к.т.н., ГНУ ВИЭСХ Россельхозакадемии, зав. лабораторией энергообеспечения сельских зданий, крестьянских и фермерских хозяйств, E-mail: shepvalovaolga@mail.ru