УДК: 62-83

АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЗВЕНЬЕВ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В.Т. Вишнеревский

В статье освещаются вопросы аппроксимации трансцендентных передаточных функций звеньев с распределенными параметрами. Статья содержит исследование точности аппроксимации в частотной области. На основании полученных данных делается вывод о применимости аппроксимированных передаточных функций для дальнейших исследований.

Ключевые слова: электропривод, подъемник, конвейер, транспортер, описание, параметр, жесткость, звено, функция, аппроксимация, точность, моделирование.

В настоящее время в промышленности и сельском хозяйстве используется множество электроприводов установок, в механической части которых присутствуют звенья с распределенными параметрами. Такими распределенными параметрами являются масса и жесткость механической связи.

К промышленным установкам, содержащим звенья с распределенными параметрами можно отнести подъемники различных типов, а также конвейеры и транспортеры большой протяженности.

В рассматриваемых установках могут возникать колебания распределенных механических элементов. Колебания достаточно большой амплитуды вызывают в элементах механической части установок недопустимые по величине деформации, которые могут стать причиной возникновения аварийных ситуаций, сокращения срока службы оборудования, а также полного выхода механизмов из строя.

Для того чтобы избежать указанных выше явлений необходимо управлять электроприводом промышленной установки в соответствии с допустимым режимом работы.

Современные тенденции развития автоматизированного электропривода таковы, что для управления различными установками чаще всего применяются частотные преобразователи с асинхронными двигателями или системы управляемый преобразователь напряжения – двигатель постоянного тока.

Часто возникает необходимость построения замкнутых систем управления электроприводом, которые позволяют исключить появление в механической части установок резонансных явлений и незатухающих колебаний.

Также использование замкнутых систем управления позволяет уменьшить механические нагрузки в кинематических цепях, увеличить производительность и точность перемещения рабочего органа установки.

Для построения высокоточных замкнутых систем управления электроприводами, содержащими в механической части звенья с распределенными параметрами, необходимо получить математическое описание распределенных элементов. Передаточные функции звеньев с распределенными параметрами должны с достаточной степенью адекватности соответствовать реальному объекту.

В данной работе рассматривается аппроксимация передаточных функций линейных и кольцевых распределено-упругих звеньев кинематических цепей промышленных установок.

Приняв необходимые допущения [3], расчетную схему линейного звена можно представить в виде, показанном на рисунке 1.

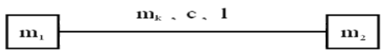

Рисунок 1 – Расчетная схема механической части электропривода, содержащей линейный объект с распределенными параметрами

В соответствии с представленной расчетной схемой динамические процессы описываются следующими уравнениями [3] :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Delta F(x,t)}{\partial x} + \rho \frac{\partial \Delta \upsilon(x,t)}{\partial t} = 0; \\
&\frac{\partial \Delta \upsilon(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{Es} \frac{\partial \Delta F(x,t)}{\partial t} = 0; \qquad (1) \\
&m_1 \frac{d\Delta \upsilon_B}{dt} = \Delta F_Д(t) - \Delta F_B(t); \\
&m_2 \frac{d\Delta \upsilon_H}{dt} = \Delta F_H(t),
\end{aligned}$$

где $\Delta F(x,t)$ – приращение усилия в сечении x каната; ρ – масса единицы длины каната; $\upsilon(x,t)$ – скорость смещения сечения x каната; E и S – модуль упругости и площадь поперечного сечения каната; $\Delta\upsilon_В$ и $\Delta\upsilon_Н$ – скорости смещения верхнего и нижнего концов каната; $\Delta F_Д$ – приращение движущего усилия; $F_В$ и $F_Н$ усилия в верхнем и нижнем сечениях каната, m_1 – масса приводного устройства, m_2 – масса рабочего органа.

В результате решения данной системы уравнений путем применения преобразований Лапласа получаются передаточные функции объекта управления от изображения движущего усилия к скорости в любом сечении элемента с распределенными параметрами:

$$\begin{aligned} W(\xi,p) &= \frac{\Delta\nu(\xi,p)}{\Delta\varphi(p)} = \\ &= (p\mu_2 ch(p\xi)sh(p) + \mu_K ch(p\xi)ch(p) - \\ &- p\mu_2 sh(p\xi)ch(p) - \mu_K sh(p\xi)sh(p)) / \\ &/(\mu_1\mu_2 p^2 sh(p) + \mu_1\mu_K p\cdot ch(p) + \\ &+ \mu_2\mu_K p\cdot ch(p) + \mu_k^2 sh(p)) \end{aligned} \quad (2)$$

где ξ – отношение расстояния, на котором находится сечение x, к длине каната. μ_1, μ_2, μ_k – отношения первой массы, второй массы и массы каната к суммарной массе соответственно.

Расчетная схема механической части рассматриваемого электропривода приведена на рис. 2, где m_1 – приведенные массы, связанные с двигателем, сосредоточенные в точке l_1 =0; m_2 – масса манипулятора, сосредоточенная в точке х = l_2.

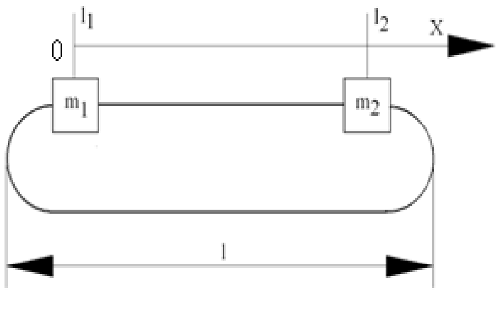

Рисунок 2 – Расчетная схема механической части электропривода, содержащей линейный объект с распределенными параметрами

Линеаризованные уравнения, характеризующие движение электропривода с учетом кольцевого одномерного точечно-неоднородного объекта с распределенными параметрами, имеют вид [2]:

$$\begin{aligned} & L_t u(x,t) = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t); \\ & u(x,0) = u_0(x); \\ & u(0,t) = u(l,t); \\ & \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x); \\ & \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}; \\ & 0 \le x \le l; \\ & t \ge 0; \\ & \rho(x) > 0; \\ & E > 0; \\ & \rho(x) = \rho_l + m_1\cdot\delta(x-l_1) + m_2\cdot\delta(x-l_2), \end{aligned} \quad (3)$$

где L_t – дифференциальный оператор, $u(x,t)$ – смещение точки распределенного объекта с координатой x в момент времени t E=const – линейный модуль упругости материала, из которого изготовлен распределенный объект, $f(x,t)$ – распределенное воздействие, $u_0(x)$, $u_1(x)$ – смещение и скорость смещения сечения *x* распределенного объекта в момент времени *t*, $\rho(x)$ – плотность на всем протяжении ленты.

Сосредоточенные массы удобно рассматривать с помощью δ – функций как бесконечные скачки плотности материала в определенных точках.

Передаточная функция распределенного кольцевого звена от усилия приложенного к массе m_1 к скорости массы m_1 при $l_1 = \xi = 0$ и $x = 0$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & W(0,\lambda,p) = 0.5\cdot a^{-1}[sh(p)ch(p) + \\ & = p\mu_2(ch^2(p) - ch^2(\lambda p))]/(sh^2 p + \\ & + p(\mu_1+\mu_2)sh(p)ch(p) + \\ & + p^2\mu_1\mu_2(ch^2(p) - ch^2(\lambda p))), \end{aligned} \quad (4)$$

где a – скорость распространения волны деформации в упругом элементе.

Передаточная функция распределенного кольцевого звена от усилия приложенного к массе m_1 к скорости массы m_2 с координатой l_2 выглядит следующим образом:

$$W(l_2,\lambda,p)=0.5\cdot a^{-1}[sh(p)ch(\lambda p)]/(sh^2 p+ +p(\mu_1+\mu_2)sh(p)ch(p)+p^2\mu_1\mu_2(ch^2(p)- -ch^2(\lambda p))); \tag{5}$$

$$\lambda=1-\frac{l_2}{0.5\cdot l}$$

Для проведения дальнейших вычислений необходимо нормировать аргумент p передаточных функций умножив его на коэффициент $k=l/a$ для передаточной функции линейного звена или на $k=l/(2a)$ для передаточной функции кольцевого звена.

При рассмотрении полученных передаточных функций звеньев с распределенными параметрами легко заметить, что использование методов прямого математического анализа и синтеза при проектировании электромеханических систем с подобными звеньями представляет собой довольно трудную задачу. Затруднения вызваны наличием в передаточных функциях бесконечных сумм и квазиполиномов. Ведь, как известно, гиперболические функции могут быть заменены бесконечными рядами.

В связи с этим возникает необходимость в проведении аппроксимации исследуемых передаточных функции моделями конечной размерности.

В данной работе используется аппроксимация разложением исходного выражения на простейшие дроби.

При использовании данного метода для получения конечномерной модели достаточно знать полюса бесконечномерной передаточной функции и значения вычетов в полюсах. Передаточная функция аппроксимированной модели представляется в виде суммы элементарных дробей, в каждой из которых учтен полюс и вычет исходной передаточной функции. Точность аппроксимации зависит от числа учтенных слагаемых.

Используемый метод аппроксимации теоретически дает высокую точность, не требует трудоемких вычислений, полученные передаточные функции при моделировании можно легко представить типовыми функциональными блоками математического пакета MATLAB Simulink, также преимуществом является то, что при изменении числа слагаемых аппроксимирующей модели ранее вычисленные полюса и вычеты не меняются.

При проведении аппроксимации предполагается, что электроприводы имеют ограниченную полосу пропускания и при решении задачи идентификации механические элементы с распределенными параметрами представляются в виде той или иной совокупности моделей элементов с сосредоточенными параметрами. При этом допускается не учитывать локальные пространственные переменные в этой модели. Среду, заключенную в рассматриваемом объеме, можно считать однородной.

Если аппроксимировать передаточную функцию распределенного звена отрезком ряда разложения по элементарным дробям, то следует учесть, что в стационарной системе с распределенными параметрами вычеты в полюсах передаточной функции зависят от пространственной координаты, в то время как спектр собственных частот постоянен для любой точки системы. Таким образом, передаточная функция системы с закрепленной точкой входа представляется как

$$W(p,\lambda)=\sum_{n=-N}^{N}\frac{a_n(\lambda)}{p-p_n}, \tag{6}$$

где $a_n(\lambda)=\underset{p=p_n}{res}\,W(p,\lambda)$; λ – координата точки входа системы.

В распоряжении имеются логарифмические амплитудно-частотные характеристики исследуемых звеньев, построенные по исходным трансцендентным выражениям при помощи численных методов. По указанным характеристикам визуально легко определяются резонансные частоты исследуемых звеньев.

Элементы, описываемые дифференциальными уравнениями в частотных производных гиперболического типа, как правило, являются слабодемпфированными, поэтому в первом приближении полюсы системы можно считать чисто мнимыми [3]:

$$p_{\pm n}=\pm j\omega_n, \tag{7}$$

где ω_n – n-ная резонансная частота.

Фактически неизвестными остаются только значения вычетов в полюсах.

Выражение (1) может быть легко преобразовано к виду (2), в котором оно более пригодно для исследования как в частотной, так и во временной области.

$$W(p)=\frac{a_0}{p}+2p\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{p^2+\omega_n^2} \tag{8}$$

Определение вычетов – это основной этап идентификации передаточных функций звеньев с распределенными параметрами. Для снижения трудоемкости расчетов необходимо найти способ определения вычетов, с помощью которого можно быстро и одновременно точно определить требуемые величины.

Для аппроксимируемых передаточных функций можно использовать следующее правило:

Если функция $f(z)=g(z)/h(z)$ имеет простой полюс в точке *a*, где $g(z)$ и $h(z)$ голоморфные в окрестности *a* функции, $h(a)=0$, $g(a)\neq 0$, то можно использовать более простую формулу [1]:

$$Res_a f(z)=\frac{g(a)}{h'(a)} \qquad (9)$$

Полученные аппроксимированные передаточные функции необходимо представить в виде структурных схем для упрощения моделирования. Структурная схема, составленная в соответствии с выражением (8), имеет вид, представленный на рисунке 3.

При проведении аппроксимация передаточных функций исследуемых звеньев с распределенными параметрами выбрано соотношение первой и второй масс 4/1. Масса распределенного элемента составляет 0,02 от суммарной массы системы с линейным звеном. При расчете кольцевого звена массой распределено-упругого элемента можно пренебречь.

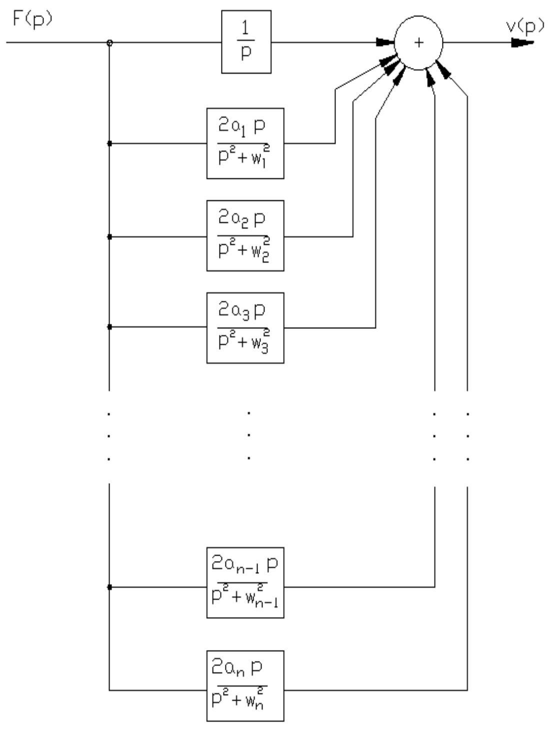

Рисунок 3 – Структурная схема аппроксимированной передаточной функции звена с распределенными параметрами

Для оценки точности аппроксимации в частотной области строятся ЛАЧХ исходной и аппроксимированной передаточных функций.

В данной работе для примера на рисунке 4 приведены графики ЛАЧХ исходной и аппроксимированной передаточных функций линейного звена. Как видно из рисунка, графики исходной и аппроксимированной математических моделей практически сливаются. Пунктирной линией показан график изменения абсолютной погрешности аппроксимации.

В качестве основного критерия оценки точности аппроксимации используется относительная погрешность, рассчитываемая по формуле:

$$\varepsilon_{\%}=\left|\frac{L(\omega)_И - L(\omega)_А}{L(\omega)_И}\right|\cdot 100\%, \qquad (10)$$

где $L(\omega)_И$ – ЛАЧХ исходной передаточной функции, $L(\omega)_А$ – ЛАЧХ передаточной функции аппроксимированной модели.

Полученные зависимости представлены на рисунке 5.

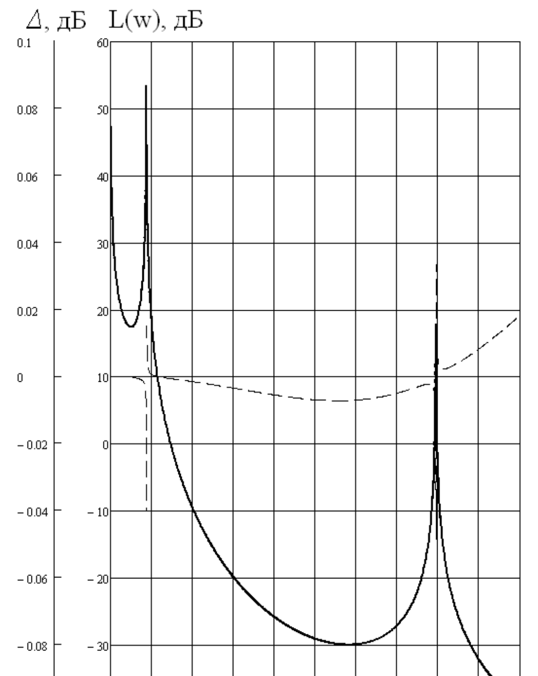

Рисунок 4 – Логарифмические амплитудно-частотные характеристики

При определении относительной погрешности возникают разрывы в точках перехода исследуемых ЛАЧХ через 0. Для большей наглядности области входных частот, которые лежат в окрестности разрыва из расчетов исключаются.

Сплошной линией показано изменение относительной погрешности при учете восьми резонансных частот, штрихпунктирной линией – при учете шести, а пунктирной – при учете четырех резонансных частот.

Точность аппроксимации довольно высока на линейных участках ЛАЧХ, однако снижается при приближении к резонансным частотам.

Повышенные требования к точности аппроксимации вызваны тем, что даже сравнительно небольшое несоответствие аппроксимированной модели исходной в частотной области может являться причиной значительного расхождения в откликах на входное воздействие при исследовании во временной области. Для проведения исследования полюсы исходной передаточной функции определяются по виду ЛАЧХ с точностью до 0,0001. Дальнейшее повышение точности определения полюсов нецелесообразно, т.к. проблематичным является определение полюсов с более высокой точностью по экспериментальной ЛАЧХ реального объекта.

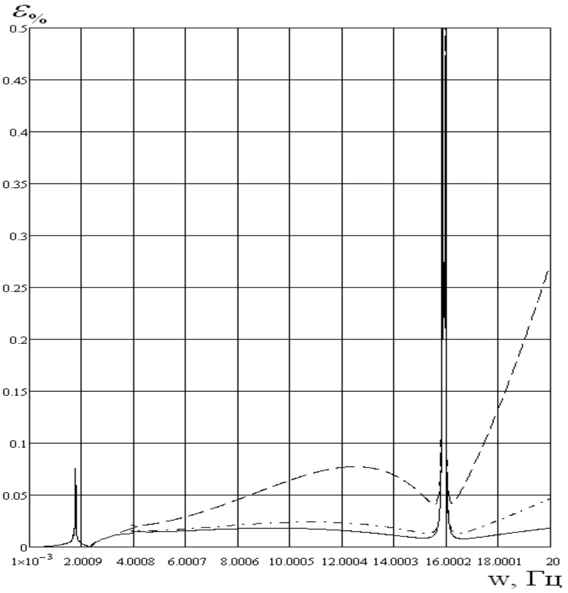

Рисунок 5 – Графики относительной погрешности аппроксимации исследуемых передаточных функций

Как видно из рисунка 5, при чрезмерном увеличении числа учитываемых резонансных частот точность увеличивается в меньшей степени, однако математическая модель аппроксимирующей передаточной функции значительно усложняется. Поэтому в каждом конкретном случае необходимо выбирать оптимальное число слагаемых аппроксимирующей модели.

На основании проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Исходные модели объектов с распределенными параметрами имеют очень сложный вид. Исследуемые выражения являются бесконечномерными, поскольку в их состав входят гиперболические функции, поэтому исследование динамики таких объектов, как звеньев системы автоматического регулирования, обычно проводится при помощи аппроксимации их уравнениями конечной размерности.

2. Существующие методы аппроксимации объектов с распределенными параметрами позволяют получать конечномерные модели, которые с достаточной для проведения исследований степенью адекватности соответствуют исходным моделям.

3. Исследования зависимости точности аппроксимации от количества учтенных резонансов показали, что в аппроксимирующей передаточной функции всегда необходимо учитывать оптимальное для каждого случая количество слагаемых. Для практических целей достаточно учета 5-6 резонансных частот исходной передаточной функции.

4. Полученные передаточные функции пригодны для моделирования в современных математических пакетах с использованием минимального количества типовых блоков, что упрощает вычисления и снижает затраты времени на исследование свойств объекта. Данные математические модели в дальнейшем найдут свое применение при моделировании систем электропривода с целью оценить влияние механической части с распределенными параметрами на силовую часть полупроводниковых преобразователей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: АСТ: Астрель 2006. – 991 с.: ил.

2. Киселев, Н.В. Электроприводы с распределенными параметрами / Н.В. Киселев, В.Н. Мядзель, Л.Н. Рассудов. – Л.: Судостроение, 1985. – 220 с.: ил.

3. Рассудов, Л.Н. Электроприводы с распределенными параметрами механических элементов / Н.В. Рассудов, В.Н. Мядзель – Л.: Энергоатомиздат, 1987. – 142 с.: ил.

Вишнеревский В.Т., *студент, Белорусско-Российский университет, тел. 8(37529)545-19-54, E-mail: vishnerevsky@mail.ru.*