РАЗДЕЛ I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ СИНТЕЗА И АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК: 519.24

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЗНАЧЕНИЙ УРОВНЯ ВРЕМЕННОГО РЯДА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Г.А. Абденова

В статье рассматривается задача прогнозирования значений уровня ряда на основе адаптивного расчета дисперсии шума модели «динамики» и шума модели «измерителя», а также уравнений фильтра Калмана. Предложен алгоритм процедуры прогнозирования значений временного ряда. Разработанный алгоритм апробирован на тестовом примере

Ключевые слова: временной ряд, модель динамики, модель измерителя, прогнозирование, фильтр Калмана, дисперсия шума

Введение

На практике часто возникает потребность построения различных типов математических моделей, позволяющий на основе данных наблюдений получать прогнозные значения для параметров технических систем. И такой математический аппарат развит в достаточной степени хорошо. При этом известно, что методы прогнозирования разделяются на экспертные, аналитические и комбинированные. Экспертные прогнозы даются экспертами в той или иной области деятельности и являются эвристическими. Для построения аналитического прогноза используется формальный математический подход. Создается математическая модель, отображающая процесс, поведение которого необходимо прогнозировать. После того как модель получена, она используется для прогнозирования поведения того процесса, который она отражает. Со временем математическая модель может корректироваться, чтобы лучше отражать действительность. Иногда на практике корректируется не модель, а прогнозируемая оценка. Подобный подход часто используется в широко известном аппарате фильтра Калмана [1].

Если представим модель временного ряда в терминах пространства состояний дискретного вида [1], то можно поставить следующую задачу: оценить характеристики шумов динамики и измерителя, а также разработать алгоритм, позволяющий в режиме реального времени получать прогнозные и фильтрационные оценки. При этом предлагается использовать адаптивный алгоритм фильтра Калмана, чтобы прогнозные оценки корректировать на основе данных текущих наблюдений с целью получения фильтрационных оценок состояния [1, 2].

Построение оценок предсказания и фильтрации

Представим модель временного ряда в терминах пространства состояний:

$$x_{k+1} = x_k + w_k \,, \qquad (1)$$

$$x(t_0) = x_0 \,, \qquad (2)$$

$$y_k = x_k + v_k \,, \quad k = 1, 2, \ldots, N \quad , (3)$$

где x_k - истинное значение уровня исследуемого временного ряда $\{y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N\}$ в момент времени k до момента $k+1$, представляющего собой некоррелированную последовательность с неизвестным средним значением $E[(w_k)] = q$ и дисперсией $E[(w_k)^2] = \sigma_w^2 = Q$; v_k - случайная последовательность с нулевым средним и неизвестной дисперсией $E[v_k^2] = \sigma^2 = R$.

Для оценивания среднего значения сформируем последовательность псевдоизмерений следующим образом:

$$v_k^{(2)} = y_k - y_{k-1}\ , \quad k = 2\,,3\,,\ldots\ . \tag{4}$$

Верхний индекс при переменных означает количество измерений, используемых при их формировании. Предположим, что q постоянно. Это означает, что можно записать следующее соотношение:

$$v_k^{(2)} = q + \tilde{v}_k \tag{5}$$

Тогда оценка значения q в предположении о его постоянстве определяется выражением

$$\hat{q}(k\,|\,k) = \hat{q}(k-1\,|\,k-1) + $$
$$+\frac{1}{k-1}(v_k^{(2)} - \hat{q}(k-1\,|\,k-1))\,,$$
$$k = 2\,,3\,,\ldots,\quad \hat{q}(1\,|\,1) = 0\,. \tag{6}$$

Можно рассмотреть выражение для невязки упрощенного фильтра по трем наблюдениям в виде:

$$v_k^{(3)} = y_k - \frac{1}{2}y_{k-1} - \frac{1}{2}y_{k-2} \tag{7}$$

Среднее значение невязок:

$$E[v_k^{(2)}] = q\ ,$$

$$E[v_k^{(3)}] = E\left[y_k - \frac{1}{2}y_{k-1} - \frac{1}{2}y_{k-2}\right] =$$
$$= E\left[y_k - y_{k-1} + \frac{1}{2}y_{k-1} - \frac{1}{2}y_{k-2}\right] =$$
$$= E\left[y_k - y_{k-1}\right] + \frac{1}{2}E\left[y_{k-1} - y_{k-2}\right] =$$
$$= E[v_k^{(2)}] + \frac{1}{2}E\left[v_{k-1}^{(2)}\right] = q + \frac{1}{2}q = \frac{3}{2}q\,.$$

Можно показать, что

$$E[(v_k^{(3)} - \frac{3}{2}q)(v_k^{(2)} - q)] = \frac{1}{2}\sigma_w^2\,.$$

Значит, последовательность измерения дисперсии σ_w^2 определяется следующим образом:

$$y_k^w = 2(v_k^{(3)} - \frac{3}{2}\hat{q}(k\,|\,k))(v_k^{(2)} - \frac{1}{2}\hat{q}(k\,|\,k))\,, k = 3,4,\ldots\ . \tag{8}$$

а оценку постоянной дисперсии σ_w^2 можно рассчитать по формуле

$$\hat{\sigma}_W^2(k\,|\,k) = \hat{\sigma}_W^2(k-1\,|\,k-1) +$$
$$+\frac{1}{k-2}[y_k^w - \hat{\sigma}_W^2(k-1\,|\,k-1)],$$
$$k = 3,\,4\,,\ldots\ \hat{\sigma}_W^2(2\,|\,2) = 0. \tag{9}$$

Далее можно показать, что $E[(v_k^{(2)} - q)^2] = 2\sigma^2 + \sigma_w^2 = 2R + Q$.

Поэтому последовательность

$$y_k^v = \frac{1}{2}[(v_k^{(2)} - \hat{q}(k\,|\,k))^2 - \hat{\sigma}(k\,|\,k)],\ k = 2,3,\ldots, \tag{10}$$

может рассматриваться как последовательность измерений дисперсии $\sigma^2 = R$, оценка которой при принятом предположении о ее постоянстве рассчитывается по рекуррентной формуле:

$$\hat{\sigma}^2(k\,|\,k) = \hat{\sigma}^2(k-1\,|\,k-1) +$$
$$+\frac{1}{k-1}[y_k^v - \hat{\sigma}(k-1\,|\,k-1)],$$
$$k = 2,3,\ldots,\hat{\sigma}^2(1\,|\,1) = 0. \tag{11}$$

Прогнозированное значение уровня ряда на один шаг $\hat{x}(k+1\,|\,k)$ выполнялось в соответствии с алгоритмом калмановского фильтра по формулам:

$$\hat{x}(k+1\,|\,k) = \hat{x}(k\,|\,k) + \hat{q}(k\,|\,k)\,, \tag{12}$$

$$\hat{x}(1\,|\,1) = y_1\,, \tag{13}$$

$$\hat{x}(k+1\,|\,k+1) = \hat{x}(k+1\,|\,k) +$$
$$+K(k+1)(y(k+1) - \hat{x}(k+1\,|\,k)), \tag{14}$$

а коэффициент усиления фильтра - по формуле:

$$K(k+1) = \frac{P(k+1\,|\,k)}{P(k+1\,|\,k) + \hat{\sigma}^2(k+1\,|\,k+1)}\,, \tag{15}$$

где

$$P(k+1\,|\,k) = P(k\,|\,k) + \hat{\sigma}_w^2(k+1\,|\,k+1)\,, \tag{16}$$

$$P(1\,|\,1) = \hat{\sigma}_w^2(1\,|\,1)\,, \tag{17}$$

$$P(k+1\,|\,k+1) = (1 - K(k+1))P(k+1\,|\,k)\,. \tag{18}$$

Таким образом, процедура адаптивного прогнозирования ряда включает следующие этапы:

Алгоритм

1. Формирование последовательности невязок упрощенного фильтра $v_k^{(2)}$ и $v_k^{(3)}$ в соответствии с выражениями (4) и (7);

2. Оценивание среднего значения прироста уровня ряда q по формуле (6);
3. Построение последовательностей произведений центрированных значений невязок по формуле (8);
4. Оценивание дисперсии шума модели «динамики» σ_w^2 в соответствии с выражением (9);
5. Построение последовательностей значений невязок по формуле (10);
6. Оценивание дисперсии шума «измерителя» σ^2 на основе выражения (11);
7. Построение последовательностей оценок уровня ряда по формулам (11)-(18).

Исследование алгоритма на тестовых данных

Рассмотрим модель (1)-(3). Смоделируем последовательность случайных величин $w_k \quad (k = 1, \ldots, 51)$ с постоянным математическим ожиданием равным 0,2 и дисперсией 0,1. Смоделируем также последовательность v_k с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 0,1. Положим $x_0 = 0$ и используя смоделированные последовательности w_k и v_k по формулам (1), (2) построим последовательность $y_k \quad (k = 1, \ldots, 51)$. К построенной последовательности применим методику оценки математического ожидания шума динамики, дисперсии шумов динамики и измерителя, а также оценки предсказания и фильтрации, изложенную выше.

Результат моделирования и оценивания приведены на следующих графиках.

Как видно из графиков, представленных на рисунках 1 и 2, предложенная методика позволяет оценивать постоянное математическое ожидание и отслеживать уровни временного ряда.

Особенность процедуры прогнозирования состоит в том, что уровни временных рядов рассматриваются как значения выхода измерителя динамической системы, описываемый в терминах пространства состояний. При этом процедура предполагает решение задачи идентификации характеристик фильтра Калмана, в частности: математического ожидания и дисперсии помех динамики; дисперсии шумов измерителя. Решение задачи идентификации характеристик фильтра Калмана, оценок прогнозирования и фильтрации осуществляются в режиме реального времени.

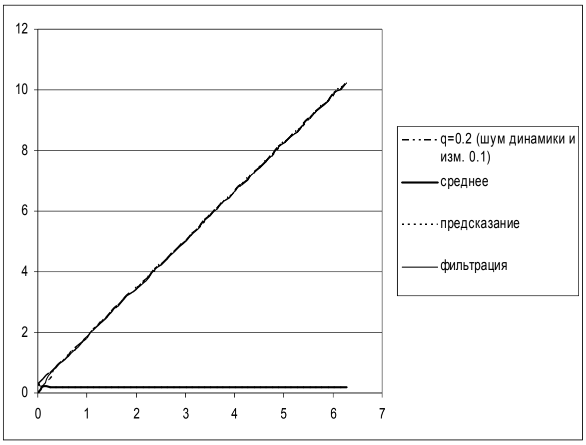

Рисунок 1- Прогнозирование поведения процесса при заданных характеристиках и параметрах фильтра Калмана

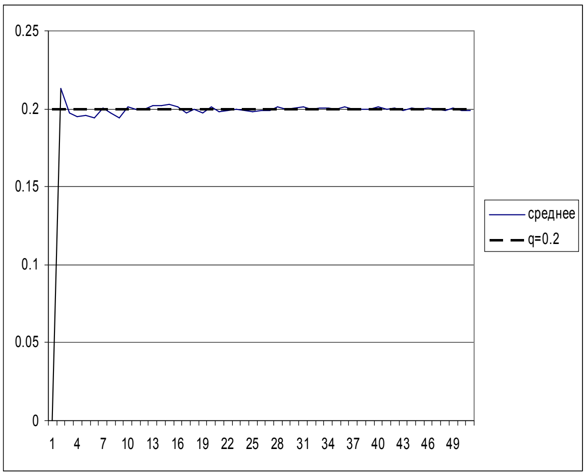

Рисунок 2 - Оценка математического ожидания шума динамики в случае его постоянства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Медич, Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. / Дж. Медич. – М.: Энергия, 1973.
2. Mehra, R. Identification and adaptive Kalman filtering // R. Mehra. - Mechanics. - 1971, № 3.– P. 34-52.

*Аспирант **Абденова Г.А.** тел. 8-923-707-27-99, gauhar@ngs.ru - каф. автоматики Новосибирского государственного технического университета*