

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

В.С. Попович, И.Б. Алиевская

Предложена математическая модель для описания динамических процессов крутильных колебаний коленчатых валов двигателей. Приводятся примеры полученных моделей и результатов расчетных параметров упругих эквивалентных крутильных систем.

Ключевые слова: коленчатый вал, двигатель, валопровод.

Динамические процессы, возникающие при работе двигателей внутреннего сгорания в результате действия периодических сил давления газов в цилиндрах двигателя, сил инерции движущих масс и сил сопротивлений приводят к появлению дополнительных напряжений в элементах коленчатых валов. Выбранные методы математического моделирования динамических процессов позволяют проводить анализ и синтез конструкций коленчатых валов как при детерминированных, так и при случайных воздействиях.

Одним из наиболее динамически напряженных элементов коренного опорного узла двигателя является коленчатый вал. Опорные условия и взаимосвязи с элементами блок-картера являются основаниями перехода от распределенной системы элементов коленчатого вала к дискретной, состоящей из массивных элементов (кривошипов), обладающих инерционными свойствами и соединенными между собой безмассовыми упругими связями. Такой подход к анализу динамических процессов, происходящих в коленчатом вале при ограниченном числе степеней свободы, позволяет представить полную картину взаимосвязанных крутильно-изгибно-продольных колебаний.

Элементы валопровода упругой системы коленчатого вала связаны в основном крутильными жесткостями. Поэтому колебания этой системы, в первую очередь, можно рассматривать как крутильные колебания, которые наиболее существенны при оценке НДС.

Успешное решение задач о сложных колебаниях упругих (деформируемых) систем возможно при описании их единой системой уравнений. Учитывая то обстоятельство, что при малом демпфировании валопровода коленчатого вала двигателя частоты свободных колебаний системы незначительно отличаются от частот вынужденных колебаний, дифференциальные уравнения движения много-

массовой системы на основании уравнений Лагранжа второго рода получим в виде:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - C_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + C_2 (\varphi_2 - \varphi_3) &= 0, \\ J_i \ddot{\varphi}_i - C_{i-1} (\varphi_{i-1} - \varphi_i) + C_i (\varphi_i - \varphi_{i+1}) &= 0, \quad (1) \\ J_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} - C_{n-2} (\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) + \\ + C_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0, \\ J_n \ddot{\varphi}_n - C_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0 \end{aligned}$$

Решение этой системы описывается в форме простых гармонических колебаний вида

$$\varphi_i = \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i \sin(\omega_c \cdot t + \varepsilon_i).$$

В результате дифференцирования и подстановки в получим систему алгебраических уравнений, связывающих амплитуды и частоты

$$\begin{aligned} -J_1 \phi_1 \cdot \omega_c^2 + C_1 (\phi_1 - \phi_2) &= 0, \\ -J_2 \phi_2 \cdot \omega_c^2 - C_1 (\phi_1 - \phi_2) + C_2 (\phi_2 - \phi_3) &= 0, \\ -J_i \phi_i \cdot \omega_c^2 - C_{i-1} (\phi_{i-1} - \phi_i) + C_i (\phi_i - \phi_{i+1}) &= 0, \quad (2) \\ -J_{n-1} \phi_{n-1} \cdot \omega_c^2 - C_{n-2} (\phi_{n-2} - \phi_{n-1}) + C_{n-1} (\phi_{n-1} - \phi_n) &= 0, \\ -J_n \phi_n \cdot \omega_c^2 - C_{n-1} (\phi_{n-1} - \phi_n) &= 0. \end{aligned}$$

Приведение дифференциального уравнения, представленного в векторно-матричном виде

$$[J]\{\ddot{\varphi}\} + [C]\{\varphi\} = 0 \quad (3)$$

к стандартной форме линейных алгебраических уравнений с параметрами системы в безразмерном виде на основании принятых соотношений к виду

$$J_i / J_0 = J'_i, \quad C'_i = C_i / C_0, \quad \omega^2 = z C_0 / J_0$$

к виду

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

$$([C] - \omega_c^2 [J])\{\phi\} = 0, \quad (4)$$

(где $J_0 = \max J_i$, $C_0 = \max C_i$)
которое позволяет представить характеристическое уравнение в виде определителя относительно ω_c^2 .

Решение уравнений свободных колебаний выполнялось в форме определителей [1] с применением ЭВМ. Для практических расчетов, во избежание проведения операций с числами высоких порядков, а также для возможности использования стандартных программ целесообразно сделать линейную подстановку $\phi_i = \psi_i / \sqrt{J_i}$. Тогда частотное уравнение для рассматриваемой упругой системы будет иметь вид

$$\Delta(\omega_c^2) = [C] - \omega_c^2 [J] = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) решалось при разворачивании определителя по главным диагональным минорам. Ряд, составленный из $\Delta_0 = 1, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ служит для разделения корней частотного уравнения. Для нахождения коэффициентов характеристического полинома определителя применялся алгоритм А.М. Данилевского [2]. Вычисление корней полинома осуществлялось методом Ньютона. Из частотного уравнения (5) определяем матрицу собственных частот (спектральную матрицу) диагонального вида, а с учетом (4) матрицу собственных векторов (модальную матрицу), в которой каждому значению собственной частоты соответствует столбец собственных векторов.

Структуры матриц имеют вид, представленный (6).

В общем случае математические модели анализа и синтеза динамических систем в векторно-матричной форме могут быть представлены в виде

$$\omega_i^2 = \begin{vmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{vmatrix},$$

$$[\phi] = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$[J]\{\ddot{\phi}\} + [K]\{\dot{\phi}\} + [C]\{\phi\} = \{M(t)\}, \quad (7)$$

где $[J]$, $[K]$, $[C]$ – матрицы соответственно инерционных параметров, коэффициентов демпфирования и жесткостей, $\{\phi\}$ – вектор координат состояния элементов системы – углов закручивания масс и их производных, $\{M(t)\}$ – вектор внешних воздействий.

Колебательную систему валопровода коленчатого вида в общем случае будем рассматривать как линейную систему регулирования. Анализ динамических систем регулирования проводится с учетом частотных характеристик этих систем. Если на вход линейной разомкнутой системы подать гармоническое возмущение, то по истечении некоторого времени после подачи возмущения, когда затухнут все движения, вызванные переходным процессом, на выходе системы установится также гармоническое изменение выходной величины с той же частотой, что и входная, но с иными амплитудой и фазой. Эти величины будут зависеть от частоты возмущающего сигнала, от динамических свойств системы и диссипативных её свойств. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) выражает зависимость параметров установившихся выходных колебаний и в полной мере определяет также динамические свойства системы подобно временной характеристике или дифференциальным уравнениям.

Передаточная функция для системы линейных уравнений имеет вид

$$W_p = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}, \quad (8)$$

где $b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n$ – характеристический полином матрицы системы, приведенной к нормальному виду,

$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m$ – характеристический полином матрицы системы, в которой имеется возмущающее воздействие.

Заменяя $p = j\omega$, получим частотную характеристику

$$F(j\omega) = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_m(j\omega)^m}{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_n(j\omega)^n}. \quad (9)$$

Вычисление коэффициентов характеристических полиномов осуществляется по методу, предложенному в [2]. На основании этого метода строится последовательность матриц $A_1, A_2, \dots, A_n$ в виде

$$A_1 = A, \quad p_1 = S_p A_1, \quad B_1 = A_1 - p_1 E,$$

$$A_2 = A_1, \quad p_2 = \frac{S_p A_2}{2}, \quad B_2 = A_2 - p_2 E,$$

.....

$$A_n = A_{n-1}, \quad p_n = \frac{S_p A_n}{n}, \quad B_n = A_n - p_n E$$

где, p_i - коэффициенты характеристического полинома

$$\varphi(t) = (-1)^n [t^n - p_1 \cdot t^{n-1} - p_2 \cdot t^{n-2} - \dots - p_n]$$

Так как коэффициенты характеристического полинома располагаются в порядке 1, p_1 , p_2 , ..., p_n , то частотную характеристику удобно записать

$$F(j\omega) = \frac{a_1(j\omega)^m + a_2(j\omega)^{m-1} + \dots + a_{m+1}}{b_1(j\omega)^n + b_2(j\omega)^{n-1} + \dots + b_{n+1}}. \quad (10)$$

Амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики $F(\omega)$, $\alpha(\omega)$ определяются по следующим выражениям:

$$F(\omega) = |F(j\omega)| = \sqrt{F_R^2(\omega) + F_j^2(\omega)},$$

$$\alpha(\omega) = \arctg F(j\omega) = \arctg \frac{F_j(\omega)}{F_R(\omega)}.$$

где F_R и F_j – вещественная и мнимая части

Для вычисления $F(\omega)$ выражение для $F(j\omega)$ преобразуется к виду:

$$F(j\omega) = \frac{A_R(\omega) + jA_j(\omega)}{B_R(\omega) + jB_j(\omega)} = F_R(\omega) + jF_j(\omega)$$

В этом случае

$$A_R = (-1)^{\frac{m}{2}} a_1 \omega^m + \dots + a_{m-3} \omega^4 + a_{m-1} \omega^2 + a_{m+1},$$

$$A_j = \omega (-1)^{\frac{m-2}{2}} a_2 \omega^{m-2} + \dots + a_{m-2} \omega^2 + a_m,$$

$$B_R = (-1)^{\frac{n}{2}} b_1 \omega^n + \dots + b_{n-3} \omega^4 + b_{n-1} \omega^2 + b_{n+1},$$

$$B_j = \omega (-1)^{\frac{n-2}{2}} b_2 \omega^{n-2} + \dots + b_{n-2} \omega^2 + b_n.$$

Полиномы A_R , A_j , B_R , B_j вычисляются по схеме Горнера.

Окончательно имеем

$$F_R(\omega) = \frac{A_R B_R + A_j B_j}{B_R^2 + B_j^2}, \quad F_j(\omega) = \frac{A_j B_R - A_R B_j}{B_R^2 + B_j^2},$$

$$F(\omega) = \sqrt{F_R^2 + F_j^2} = \sqrt{\frac{A_R^2 + A_j^2}{B_R^2 + B_j^2}}.$$

Резонансные частоты рассчитываемой крутильной системы определяются выбросами АЧХ. Выбросы АЧХ находятся в интерва-

лах, на концах которых производная $F'(\omega)$ имеет знаки “+” и “-”. Производная находится по следующей зависимости

$$F'(\omega) = \frac{A_R A_R' + A_j A_j'}{A_R^2 + A_j^2} - \frac{B_R B_R' + B_j B_j'}{B_R^2 + B_j^2}.$$

После выделения интервала, содержащего выброс $F(\omega)$ значение резонансной частоты соответствующей этому выбросу, уточнялось методом «золотого сечения».

Программа, реализующая данный алгоритм, позволяет определять и собственные векторы, соответствующие выбросам АЧХ. Система линейных дифференциальных уравнений преобразуется к виду

$$\begin{aligned} (a_{22} + a_0^2) \phi_2 + a_{23} \phi_3 + \dots + a_{2n} \phi_n &= -a_{21}, \\ a_{23} \phi_2 + (a_{33} + a_0^2) \phi_3 + a_{23} \phi_3 + \dots + a_{3n} \phi_n &= -a_{31}, \\ a_{2n} \phi_2 + \dots + (a_{nn} + a_0^2) \phi_n &= -a_{n1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Первая компонента собственного вектора $\phi_1 = 1$, остальные $\phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$ являются решением полученной системы.

При вычислении полиномов A_R, A_j, B_R и B_j и их производных на высоких частотах может возникнуть переполнение. Для устранения его при вычислении $F(\omega)$, $F(j\omega)$ производится масштабирование. Для этого выбирается величина M_F

$$M_F = \begin{cases} \max \{A_R, A_j, B_R, B_j\} & \text{äëý } F(\omega), \\ \max \{A_R, A_j, B_R, B_j, A_{R1}, A_{j1}\} & \text{äëý } F_{1-2}(\omega). \end{cases} \quad (12)$$

и значения полиномов в этом случае делятся на величину M_F .

Программа «Частотная характеристика» осуществляется построение АЧХ, нахождение собственных частот и соответствующих им собственных векторов системы линейных дифференциальных уравнений. Если рассматривается рядная система, то задаются коэффициенты верхней диагонали матрицы системы, программа формирует матрицу системы линейных дифференциальных уравнений 2-ого порядка и приводит ее к нормальному виду. Коэффициенты затухания в этом случае задаются также в виде одномерного массива. Если система разветвленная, то должны быть заданы матрица системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка и матрица коэффициентов затуханий.

Периодический характер действующих нагрузок, воспринимаемых кривошипно-шатунным механизмом, способствует появ-

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

лению различных видов колебаний в деталях силовой установки с двигателями. Форсирование двигателей, снижение их массы приводит к росту динамической нагруженности деталей, в частности, для коленчатого вала. В общей картине динамической нагруженности коленчатых валов все большую роль играют крутильные колебания, возникающие от неравномерности периодического момента движущих сил и сил сопротивления. Неравномерность крутящего момента вызывает неравномерность изменения угловой скорости вращения вала.

Современные методы расчета крутильных колебаний коленчатых валов ДВС позволяют определить те дополнительные напряжения, которые возникают в сечениях вала при работе двигателя в условиях резонанса. Критерием проявления резонанса считается совпадение угловой частоты резонирующих гармоник крутящего момента на валу двигателя с одной из угловых частот свободных крутильных колебаний. Характерной особенностью резонансного колебательного процесса является интенсивный рост или развитие амплитуд вынужденных колебаний. Это процесс продолжается до тех пор, пока увеличение энергии в системе за счет работы возбуждения, совершаемой резонирующими гармоническими крутящими моментами, не станет равной работе деформирующих сил.

В работе [3] более подробно и всесторонне рассмотрены вопросы динамического исследования колебательных процессов в коленчатых валах двигателей внутреннего сгорания.

Расчетная крутильная схема двигателя 4Ч 13/14 приведена на рисунке 1, на рисунке 2-расчетная крутильная система этого двигателя, где заштрихованными связями условно показано, что корпус двигателя считается жестким телом. Здесь $e_k = 2l'_k/l$ - крутильная податливость подвески, l'_k - линейная податливость опоры, l - расстояние между опорами. Введение реактивной связи, учитывающей упругую подвеску корпусных деталей, как парциальной системы, приводит к понижению частот собственных колебаний.

Значения частот свободных колебаний для коленчатого вала двигателя 4Ч 13/14 при одноузловой форме колебаний равны 154,6 Гц (1475 цикл/мин) и при двухузловой-1030,2 Гц (9830 цикл/мин). В рабочем интервале частот вращения коленчатого вала имеют место следующие резонансы: при одноузловой форме колебаний $n=1475 \text{ мин}^{-1}$ и $h=1,0$; $n=983 \text{ мин}^{-1}$ и $h=1,5$; при двухузловой форме

колебаний $n=1787 \text{ мин}^{-1}$ и $h=5,5$; $n=1638 \text{ мин}^{-1}$ и $h=7,0$ и т.д.

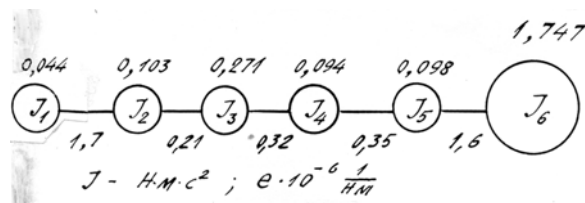


Рисунок 1- Расчетная эквивалентная крутильная схема двигателя 4Ч 13/14

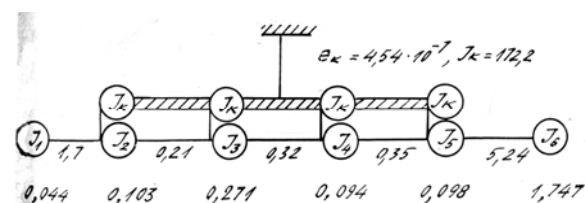


Рисунок 2- Расчетная эквивалентная крутильная схема двигателя 4Ч 13/14 с учетом упругой подвески

На рисунке 3 показана расчетная схема динамической системы коленчатого вала с возмущающими крутящими моментами на коренных шейках. Определение возможных резонансных режимов возможно на основании частотных диаграмм, которые приведены в [3].

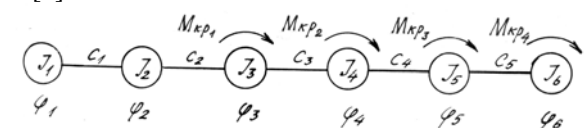


Рисунок 3- Расчетная динамическая крутильная система коленчатого вала двигателя 4Ч 13/14

Переменный крутящий момент $M_{кр}$, величина которого при любом угле поворота коленчатого вала α , может быть определена на основании индикаторной диаграммы, имеет спектральное представление в виде суммы элементарных моментов (гармоник):

$$M_{кр} = M_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h \sin h \eta_0 t + \sum_{h=1}^{\infty} B_h \cosh \eta_0 t = \quad (13)$$

$$M_0 + \sum_{h=1}^{\infty} M_h \sin (h \eta_0 \cdot t + \varepsilon_h),$$

где M_0 – постоянная составляющая крутящего момента, M_h – амплитуда гармонического момента, h – порядок гармоники, η_0 – средняя угловая скорость вращения вала в рассмат-

риваемом промежутке времени, $\mathcal{E}_h$ – фазовый угол гармоники.

Дифференциация $M_{кр}$ на гармонические компоненты крутящего момента на валу, создаваемые давлением газов на поршень и компоненты этого момента, обусловленные силами инерции поступательно двигающихся масс шатунно-кривошипного механизма, позволяет проанализировать цикличность колебаний угловой скорости вращения вала.

Обычное разложение кривой крутящего момента на валу двигателя в тригонометрический ряд по углу поворота кривошипа α еще не дает того гармонического спектра, который необходим при анализе вынужденных колебаний системы. По существу каждый компонент M_h достаточно сложен по своему спектральному содержанию и представляет ряд гармонических методов в виде несущей гармоники и дополнительных гармоник различной интенсивности. Поводом к такому представлению каждой M_h ряда (13) является, прежде всего, неравномерность вращения коленчатого вала двигателя и причины, вызывающие эту неравномерность. Кроме того, физические причины заложены в механических свойствах колебательных систем с постоянными массами и жесткостями.

Каждая гармоническая по углу поворота кривошипа α слагающая M_h крутящего момента $M_{кр}$, входящая в обычное разложение $M_{кр}$ в ряд Фурье перестает быть моногармонической функцией времени в случае вращения вала с переменной колеблющейся скоро-

стью. За счет эффекта частотой (а для инерционных гармоник – смешанной) модуляции при степени неравномерности вращения вала $\delta \gg 0$, гармонический по t спектр каждого момента M_h , а, следовательно, и всех A_h и B_h в формуле (13), содержит множество моногармонических компонент несущую гармонику и спутников.

Суммирование компонент, вычисленных для всех A_h и B_h дает полный гармонический по времени частотный спектр гармоник крутящего момента $M_{кр}$ на валу двигателя. Для линейных систем справедлив метод суперпозиции, расчет вынужденных крутильных колебаний производится для каждой из гармоник с последующим суммированием результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабаков, И.М. Теория колебаний/ И.М., Бабаков.-М.: Наука, 1968. - 228 с.
2. Фаддеев, Д.К., Фаддеева, В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры./Д.К., Фаддеев, В.Н., Фаддеева. М.: -Л.: Физматгиз, 1963.-134 с.
3. Попович, В. С. Разработка и использование методов расчетно- экспериментального комплексного исследования напряженно-деформированного состояния сопряженных деталей двигателей внутреннего сгорания./Дис. докт. техн. наук. Барнаул: 1990. 328 с.

Попович В.С., д.т.н., проф., тел. (3852) 36-84-97, Алиевская И.Б.