

МЕТОДЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА ПРОЧНОСТИ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ

В.С.Попович, И.Б.Алиевская

В статье приведена методика и программное обеспечение расчета напряженно-деформированного состояния по неразрезной схеме многоопорных статически неопределимых колеччатых валов. Комплексный анализ прочности включает оптимизацию конструктивных размеров вала и прогнозирование надежности эксплуатации по критериям НДС.

Многоопорные колеччатые валы современных быстроходных двигателей представляют собой статически неопределимые системы. При расчете на прочность таких систем за основную статически определимую систему принимают колеччатый вал, опертый на две опоры (как правило – крайние), для остальных опор отброшенные связи заменяются реакциями или надопорными изгибающими моментами.

Условия равновесия опоры и схема взаимного положения кривошипов приведены на рисунках 1 и 2.

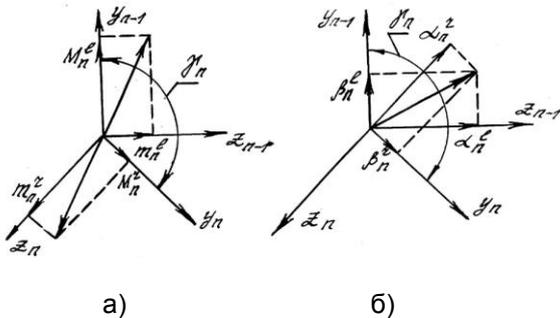


Рис. 1. Условия равновесия (а) и непрерывности (б) n-го опорного сечения

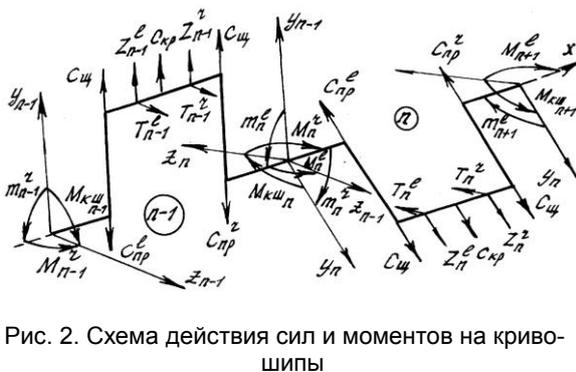


Рис. 2. Схема действия сил и моментов на кривошипы

Для раскрытия статической неопределенности необходимо составить $2(n-1)$ систем уравнений, определяющих степень статической неопределенности с учетом условий

равновесия и непрерывности упругой линии для опор. Для любой опоры ($n = 2 \dots N$, где N – количество кривошипов вала) составляются два алгебраических неоднородных уравнения, вид которых зависит от сочетания углов взаимного расположения кривошипов вала.

В общем случае, когда

$\gamma_{n-1} \neq 0, \gamma_n \neq 0, \gamma_{n+1} \neq 0$ система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & -c_{2,n-1} \frac{1}{\sin \gamma_{n-1}} M_{n-1}^l - c_{2,n-1} \times \\
 & \times \frac{\cos \gamma_{n-1}}{\sin \gamma_{n-1}} M_{n-1}^r - (c_{2,n-1} + c_{1,n}) \times \\
 & \times \frac{\cos \gamma_n}{\sin \gamma_n} M_n^l - (c_{2,n} \frac{1}{\sin \gamma_n} + \\
 & + c_{1,n} \frac{\cos^2 \gamma_n}{\sin \gamma_n} + k_{1,n} \cdot \sin \gamma_n) M_n^r - \\
 & - (c_{2,n} \frac{\cos \gamma_{n+1} \cdot \cos \gamma_n}{\sin \gamma_{n+1}} - k_{2,n} \sin \gamma_n) \times \\
 & \times M_{n+1}^l - c_{2,n} \frac{\cos \gamma_n}{\sin \gamma_{n+1}} M_{n+1}^r = Z_{n-1}^l \cdot \\
 & \cdot u'_{2,n-1} + Z_{n-1}^r \cdot u''_{2,n-1} + C_{\dot{u}_{n-1}} \cdot t_{2,n-1} - \\
 & - C_{np,n-1}^r \cdot t_{1,2,n-1} - C_{np,n-1}^l \cdot t_{2,2,n-1} + Z_{n-1}^l \cdot \\
 & \cdot u'_{1,n} + Z_{n-1}^r \cdot u''_{1,n} + C_{\dot{u}_{i,x}} \cdot t_{1,n} - C_{np}^r \cdot t_{11,n} - \\
 & - C_{np,n}^l \cdot t_{21,n}) \cos \gamma_n - (T_n^l \cdot v'_{1,n} + \\
 & + T_n^r \cdot v''_{1,n} - M_{\dot{\epsilon}\phi,n} \cdot s_n) \sin \gamma_n ; \\
 & - k_{2,n-1} M_{n-1}^r + (c_{1,n} + k_{12,n-1}) M_n^l + \\
 & + (c_{1,n} - k_{1,n}) \cos \gamma_n \cdot M_n^r + \\
 & + (c_{2,n} \frac{\cos \gamma_{n+1}}{\sin \gamma_{n+1}} \sin \gamma_n + k \cos \gamma_n - \\
 & M_{n+1}^l + c_{2,n} \frac{\sin \gamma_n}{\sin \gamma_{n+1}} M_{n+1}^r =
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$= -T_n^l \cdot v'_{2,n-1} - T_n^r \cdot v''_{2,n-1} - \\ - M_{\hat{e}\phi} \cdot s_{n-1} - (T_n^l \cdot v'_{1,n} + \\ + T_n^r \cdot v''_{1,n} - M_{\hat{e}\phi} \cdot s_n) \cos \gamma_n - \\ - (Z_n^l \cdot u'_{1,n} + Z_n^r \cdot u''_{1,n} + c_{\ddot{u}\ddot{u}} \cdot t_{1,n} - \\ - \tilde{n}_{np,n}^r \cdot t_{11,n} - \tilde{n}_{np}^l \cdot t_{21,n}) \sin \gamma_n.$$

Здесь через M_{ϕ}^l и M_{ϕ}^r обозначены составляющие надопорных изгибающих моментов, действующих в соответствующем опорном сочетании в плоскости, перпендикулярной плоскости кривошипа слева и справа от сечения;

$c_{\phi}, k_{\phi}, u'_{\phi}, u''_{\phi}, t_{\phi}, v'_{\phi}, v''_{\phi}, s_{\phi}$ - коэффициенты пропорциональности между силами и моментами, действующими на кривошип коленчатого вала и углами поворота левого и правого надопорных сечений, рисунок 2.

Надпорные изгибающие моменты, действующие в плоскости кривошипа n -ой опоры при $\gamma_n \neq 0$ определяются

$$m_n^l = \frac{1}{\sin \gamma_n} M_n^r - \frac{\cos \gamma_n}{\sin \gamma_n} M_n^l; \quad (2)$$

$$m_n^r = \frac{1}{\sin \gamma_n} M_n^l + \frac{\cos \gamma_n}{\sin \gamma_n} M_n^r.$$

В случае, когда $\gamma_n = 0$, то между моментами, действующими в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, имеет место следующая зависимость

$$M_n^r = -M_n^l; \quad m_n^r = -m_n^l;$$

при $\gamma_n = 180^\circ$

$$M_n^r = M_n^l; \quad m_n^r = m_n^l.$$

В матричной виде система уравнений имеет вид:

$$KM = -A, \quad (3)$$

где K - матрица коэффициентов пропорциональности, M - матрица-столбец неизвестных надопорных изгибающих моментов; A - матрица-столбец свободных членов.

Элементы матрицы K системы уравнений для раскрытия статической неопределённости определяются на основании выражений:

$$k_{1,1} = -c_{1,2,n-1} + c_{1,n} \frac{\cos \gamma_n}{\sin \gamma_n}, k_{1,2} = \\ = - (c_{1,2,n} \frac{1}{\sin \gamma_n} + c_{1,n} \frac{\cos^2 \gamma_n}{\sin \gamma_n} + \\ + k_{1,n} \sin \gamma_n), \\ k_{1,3} = -c_{2,n} \frac{\cos \gamma_{n+1} \cos \gamma_n}{\sin \gamma_{n+1}} - \\ - k_{2,n} \sin \gamma_n, k_{1,4} = \\ = -c_{2,n} \frac{\cos \gamma_n}{\sin \gamma_{n+1}}, k_{2,1} = c_{1,n} + k_{12,n-1}, \\ k_{2,2} = (c_{1,n} - k_{1,n}) \cos \gamma_n, \\ k_{2,3} = (c_{2,n} \frac{\cos \gamma_{n+1}}{\sin \gamma_{n+1}} \sin \gamma), \\ k_{2,4} = c_{2,n} \frac{\sin \gamma_n}{\sin \gamma_{n+1}} \quad u \ m. \partial.$$

Матрицы-столбцы неизвестных надопорных моментов и свободных членов уравнений имеют вид:

$$M = \begin{vmatrix} M_2^l \\ M_2^r \\ M_3^l \\ M_3^r \\ \vdots \\ M_n^l \\ M_n^r \end{vmatrix} \begin{matrix} \ddot{e}\ddot{e} \\ \ddot{e}\ddot{e} \\ \ddot{e}\ddot{e} \\ \ddot{e}\ddot{e} \\ \ddot{e}\ddot{e} \\ \ddot{e}\ddot{e} \end{matrix} \begin{matrix} m_2^l \\ m_3^l \\ m_3^r \\ m_n^l \\ m_n^r \end{matrix}, \quad A = \begin{vmatrix} a_2^Z \\ a_2^T \\ a_3^Z \\ a_3^T \\ \vdots \\ a_n^Z \\ a_n^T \end{vmatrix} \quad (5)$$

Элементы матрицы свободных членов определяются

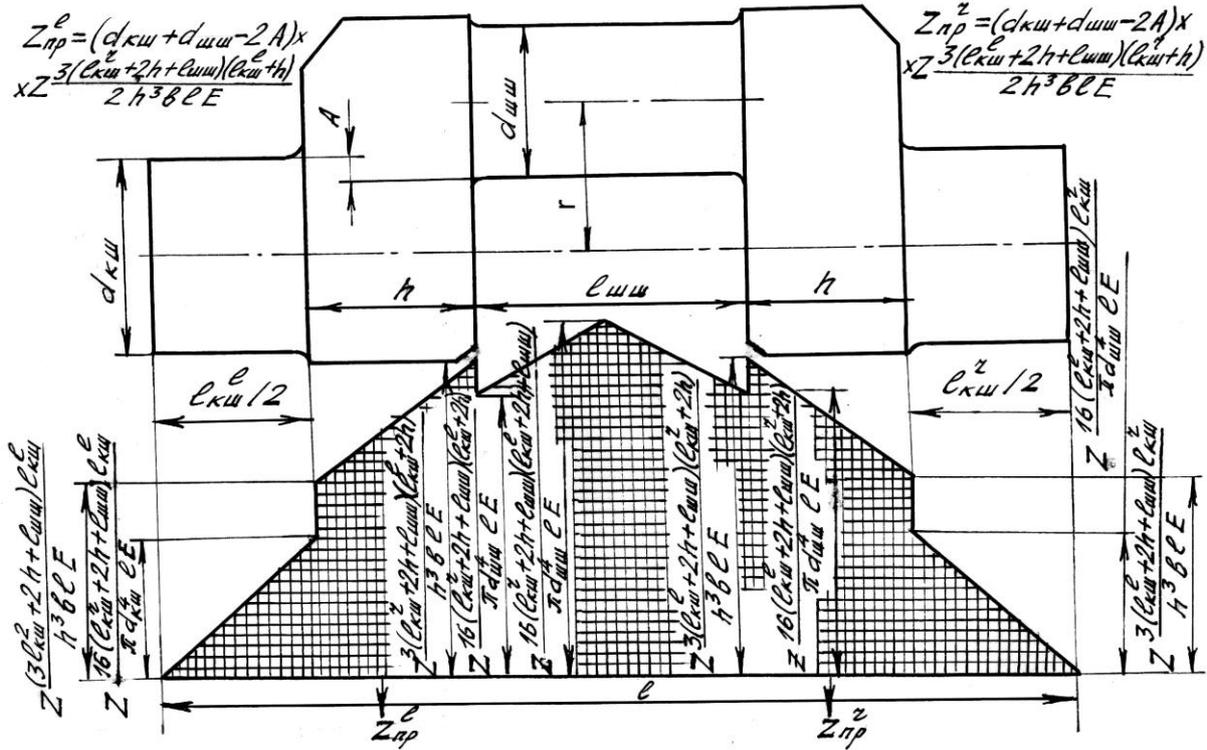


Рис. 3. Диаграмма фиктивной нагрузки от действия силы Z

$$\begin{aligned}
 a_2^Z &= Z_1^l \cdot u'_{2,1} + Z_1^r \cdot u''_{2,1} + \\
 &+ c_{uw_1} \cdot t_{2,1} - c_{np1}^r \cdot t_{12,1} - \\
 &- c_{np}^l \cdot t_{22,1} + (Z_2^l \cdot u'_{1,2} + \\
 &+ Z_2^r \cdot u''_{1,2} + c_{uw_2} \cdot t_{1,2} - \\
 &- c_{np2}^r \cdot t_{11,2} - c_{np2}^l \cdot t_{21,2}) \\
 &\cdot \cos \gamma_2 - (T_2^l \cdot v_{1,2} + T_2^r \cdot v''_{1,2} - \\
 &- M_{ку_2} \cdot s_1) \sin \gamma_2; \\
 a_2^T &= -T_1^l \cdot v'_{2,1} - T_1^r \cdot v''_{2,1} - \\
 &- M_{ш_1} \cdot s_1 - (T_2^l \cdot v'_{1,2} + \\
 &+ T_2^r \cdot v''_{1,2} - M_{ку_2} \cdot s_2) \cos \gamma_2 - \\
 &- (Z_2^l \cdot u'_{1,2} + Z_2^r \cdot u''_{1,2} + \\
 &+ c_{uw_2} \cdot t_{1,2} - c_{np2}^r \cdot t_{11,2} - \\
 &- c_{np2}^l \cdot t_{21,2}) \sin \gamma_2 \quad \text{и т.д.}
 \end{aligned}$$

Для решения систем линейных алгебраических уравнений пользуются уже известными методами, среди которых наиболее эффективным является метод Гаусса в различной его модификации.

Входящие в уравнение для раскрытия статистической неопределенности коэффициенты пропорциональности отражают геометрические размеры элементов вала и механические свойства материала. Для их определения необходимо знать угловые деформации (углы поворота) надпорных сечений.

Учитывая то обстоятельство, что для большинства коленчатых валов длины шеек и толщина щек соизмеримы, выражения для коэффициентов получены через размеры элементов вала: длины коренных шеек слева и справа - $l_{\epsilon\phi}^l$ и $l_{\epsilon\phi}^r$, длина шатунной шейки $l_{шш}$, толщину и ширину щеки h и b , диаметры коренной и шатунной шеек $d_{\epsilon\phi}$, $\delta_{\epsilon\phi}$, $d_{\phi\phi}$ и $\delta_{\phi\phi}$, перекрытие шеек A и длину кривошипа l_i . Диаграммы фиктивных нагрузок и формулы для определения коэффициентов пропорциональности приведены в [1] а на рисунке 3, при действии силы Z .

Матрицы компонентов реакций в ортогональных плоскостях кривошипов определяются

$$\mathbf{R}^Z \cong \mathbf{P}_R^Z \cdot \mathbf{E}_R, \quad \mathbf{R}^T \cong \mathbf{P}_R^T \cdot \mathbf{E}_R, \quad (6)$$

где $[b_R^Z]$ и $[b_R^T]$ - матрицы-строки, элементами которых являются нагрузки, действующие на кривошип вала; $[k_R^Z]$ и $[k_R^T]$ - матрицы-столбцы плеч для соответствующих нагрузок.

При реализации выражения с учетом изменения частоты вращения коленчатого вала (для m угловых положений) размерность совокупной матрицы $[R]$ составляет $[n \times m]$, n - количество опор вала.

Учет жесткости характеристик вала и коренных опор, несоосности коренных подшипников и их износа (зазоров) проводится путем умножения на матрицу поправочных коэффициентов матриц $[k^Z]$ и $[k^T]$ из [1]. Поправочные коэффициенты, учитывающие жесткость опор, определяются соотношением

$$\eta_i = E_i - \frac{1}{2l_i} [E_n \cdot l_i + E_1 (\sum l_i - l_i)] \quad (7)$$

где $E_i = C_{kp} / C_0$ - соотношение жесткости для i -го кривошипа вала и коренной опоры блок-картера; E_1 и E_n - тоже для i -ой и n -ой опор; l_i - длина i -го кривошипа.

Несоосность коренных подшипников и их износ учитываются экспериментальными коэффициентами

В матричной форме выражения для изгибающих моментов в расчетных сечениях элементов вала имеют вид

$$[M^Z] = [M^Z] [k^Z]; [M^T] = [M^T] [k^T] \quad (8)$$

При определении суммарных изгибающих моментов в расчетных сечениях коренных и шатунных шеек элементы матриц $[M_{\epsilon\phi}^Z]$ и $[M_{\epsilon\phi}^T]$ определяются как

$M = \sqrt{(M^Z)^2 + (M^T)^2}$. Размерность матриц $(N \times t) \times m$, N - количество кривошипов вала, t - количество расчетных сечений.

Для крутящих моментов имеем

$$[M_{\kappa}^Z] = [T] \cdot r, [M_{\kappa}^T] = [M_{\kappa}^Z] [k^T] \cdot r, \quad (9)$$

где $[T]$ - матрица тангенциальных сил, действующих на кривошип вала, $[k^T]$ - матрица реакций от тангенциальных сил.

Напряжения в сечениях элементов вала определяются на основании выражений

$$[\sigma] = [M^Z] [W_{\sigma}], [\tau] = [M_{\kappa}^Z] [W_{\tau}] \quad (10)$$

где $\{W_{\sigma}\}$ и $\{W_{\tau}\}$ - матрицы-столбцы моментов сопротивления изгибу и кручению элементов вала.

Элементами матриц моментов сопротивлений в зависимости от выбранного рас-

четного сечения и вида деформаций могут быть и площади расчетных сечений. При определении элементов матриц $[\sigma]$ и $[\tau]$ в зависимости от выбора расчетных сечений учитывается также матрицы $[M^T]$ или $[M_{\kappa}^Z]$, $[M_{\kappa}^T]$ и $[M_{\epsilon\phi}^Z]$.

При определении сложных напряжений по выбранной теории прочности формируются новые матрицы на основании матриц $[\sigma]$ и $[\tau]$. Таким же образом получается матрица напряжений для щек в угловых точках и в точках, лежащих на галтелях шеек вала.

Матрицы напряжений используются для определения запасов прочности в элементах вала.

Программное обеспечение *RKW* реализации алгоритма анализа НДС коленчатых валов по неразрезной схеме включает подпрограмму определения коэффициентов пропорциональности формирования и решение системы уравнений для раскрытия статической неопределенности многоопорных коленчатых валов, подпрограмму формирования матриц изгибающих и крутящих моментов, подпрограмму определения напряжений и запасов прочности для всех элементов вала.

Конструктивные размеры коленчатого вала определяются компоновкой коренного опорного узла двигателя диаметрами $D_{\kappa\kappa i} (d_{\kappa\kappa i})$, $D_{\kappa\kappa i i} (d_{\kappa\kappa i i})$, длинами $l_{\kappa\kappa i}$ и $l_{\kappa\kappa i i}$, толщиной и шириной щек h и b . Изменение линейных размеров в пределах одного кривошипа взаимосвязано зависимостью

$$l_i = 0,5l_{\epsilon\phi}^l + 0,5l_{\epsilon\phi}^r + l_{\epsilon\phi} + 2h$$

и ограничено выбранным межцилиндровым расстоянием в процессе компоновки двигателя.

При формировании целевой функции выбора конструктивных параметров включаются функциональные параметры и соотношения отдельных геометрических размеров, от которых в первую очередь зависит НДС коленчатого вала. Функция цели предусматривает равенство моментов сопротивления изгибу сечения щеки, проходящего через галтели, относительно коренной и шатунной шеек с учетом величины перекрытия шеек. Учитываются также относительные размеры щеки, и предусматривается равенство удельных давлений на шейках вала. Методика определения моментов сопротивления изгибу сечения щек с учетом перекрытия шеек вала, иллюстрирована рисунком 4, описана в [1] и является составной частью математического моделирования НДС коленчатого вала. Таким образом, функция цели имеет вид

$$\sigma_{\min} = \varphi_1 \left(\psi_{\dot{u}}^z - \beta w_{\dot{u}}^T \right) + \varphi_2 \frac{2}{D_{\dot{e}\phi} + D_{\phi\phi} - 2 \cdot r} + \varphi_3 \frac{b}{h} \quad (12)$$

где $w_{\dot{u}}^z, w_{\dot{u}}^T$ - моменты сопротивления изгибу расчетного сечения щеки, r - радиус кривошипа вала, b и h - ширина и толщина щеки, β - коэффициент податливости, φ_1, φ_2 и φ_3 - весовые коэффициенты значимости.

Каждый член функции цели определенным образом влияет на НДС коленчатого вала. Первым членом предусматривается равенство напряжений в щеке при различных условиях деформации кривошипа. Коэффициент β учитывает соотношение податливости кривошипа при различных условиях приложения нагрузки от коренной шейки к шатунной наоборот. Значения коэффициентов определялись экспериментальным путем, для коленчатого вала дизеля 6Ч 13/14. Второй член определяет необходимую жесткость, третий определяется конструкцией щеки, как наиболее деформируемого элемента вала.

Ограничения типа неравенств предусматривает выбор геометрических размеров коленчатого вала с учетом статистических данных в зависимости от параметров компоненты двигателя. Для коленчатых валов дизелей имеем:

$$\begin{aligned} 0,7 < \frac{D_{\dot{e}\phi}}{D} \leq 0,85; & \quad 0,45 < \frac{l_{\dot{e}\phi}}{D_{\dot{e}\phi}} \leq 0,6; \\ 0,65 < \frac{D_{\phi\phi}}{D} \leq 0,72; & \quad 0,7 < \frac{l_{\phi\phi}}{D_{\phi\phi}} \leq 0,8; \end{aligned} \quad (13)$$

для V - образных конструкций дизелей соответственно имеем:

$$\begin{aligned} 0,7 < \frac{D_{ки}}{D} \leq 0,75; & \quad 0,5 < \frac{l_{ки}}{D_{ки}} \leq 0,55; \\ 0,7 < \frac{D_{ши}}{D} \leq 0,72; & \quad 0,8 < \frac{l_{ши}}{D_{ши}} \leq 1,0. \end{aligned}$$

Ограничения типа равенств, предусматривающие равенство проекций опорных поверхностей шеек вала и соответственно удельных давлений на шейках, имеют вид

$$\frac{D_{ки} (0,5l_{ки}^l + l_{ки}^r)}{D_{ши} \cdot l_{ши}} \rightarrow 1,0 \quad (14)$$

Для щек вала при $(w_{\dot{u}_1}^z - \gamma w_{\dot{u}_2}^{\dot{o}}) \rightarrow 0$ вводится соблюдение соотношения $w_{\dot{u}}^z = \gamma w_{\dot{u}}^{\dot{o}}$.

Фиксированными геометрическими параметрами выбраны r - радиус кривошипа и длины кривошипов вала l_i . Предусматривается также, что материал вала не меняется.

Для поиска оптимального решения применялся метод Хука-Дживса [3,4], представляющий поиск путем последовательного изменения параметров вокруг базисной точки по образцу. За начальные базисные точки выбирались минимальные значения параметров $D_{ки}, D_{ши}, b$ и h . Вычислялись значения σ при последовательном изменении переменных. В первую очередь определялись значения

$w_{\dot{u}_1}^z = f(D_{\dot{e}\phi}, D_{\phi\phi}, h)$ и $w_{\dot{u}_2}^{\dot{o}} = f(D_{\dot{e}\phi}, D_{\phi\phi}, h)$ путем поочередного изменения переменных в направлении изменения $D_{\dot{e}\phi}, D_{\phi\phi}$ с соблюдением (проверкой) ограничения

$w_{\dot{u}_2}^T = \gamma w_{\dot{u}_1}^z$. Затем выполнялась корректировка с учетом второго ограничения, определяющего перекрытие шеек.

Для поиска оптимального выбора конструктивных параметров коленчатого вала по целевой функции σ применялся также метод покоординатного спуска (метод Гаусса-Зейделя), в основу которого положено последовательное изменение каждого конструктивного параметра относительно базовых значений при сохранении остальных параметров постоянными. Процедура выполнялась до тех пор, пока на выбранном шаге S_i не достигался минимум σ . Начальным базовым параметром для поиска по i переменному параметру является значение минимума, достигнутое при поиске по $(i-1)$ параметру. После завершения такой процедуры для всех k переменных параметров за $\left(S = \sum_{i=1}^k S_i \right)$ шагов начинается новый цикл поиска с изменением первого параметра из нового начального базисного значения, обеспечивающий улучшенное решение. Для минимизации целевой функции по каждому переменному параметру использовался метод одномерного поиска.

ражаемой, то выполняется редукция – уменьшение размеров многогранника.

Процесс решения требует определение начальной вершины многогранника, значение которой образует начальный опорный план. Далее производится итерационная последовательность вычислений, включающих определение значений параметров, функций цели и проверку условия оптимального опорного плана текущей итерации.

Множественное отражение вершин многогранника приводит к шаговому движению центра симплекса по траектории некоторой ломаной линии. Движение к оптимуму становится менее жестким, получается то или иное ускорение в зависимости от текущей информации об уровне целевой функции, в процессе поиска изменяется не только направление, но и величина шага.

Определенные при оптимизации согласно целевой функции, основанной на эвристических критериях, конструктивные параметры элементов коленчатого вала использовались при дальнейшем конструктивном синтезе, позволившем оптимизировать параметры коренного опорного узла двигателя. При этом использовался пакет прикладных программ анализа НДС коленчатых валов по неразрезной схеме, описанный выше.

Решение проблемы надежности предполагает учет реального закона распределения изменения напряжений в $f(\sigma)$ и несущей способности $f(\sigma_r)$, характеризуемой предельными значениями напряжений материала. При построении математической модели оценки надежности учитывается уровень эксплуатационной нагрузки и значений несущей способности материала детали как независимых случайных величин, имеющих определенные законы распределения.

При оценке прочностной надежности коленчатого вала по критериям напряженно – деформированного состояния определение характеристики надежности, вероятности безотказного функционирования, выполнено на основании геометрической интерпретации вероятностей кривых плотностей распределения $f(\sigma)$ и $f(\sigma_r)$

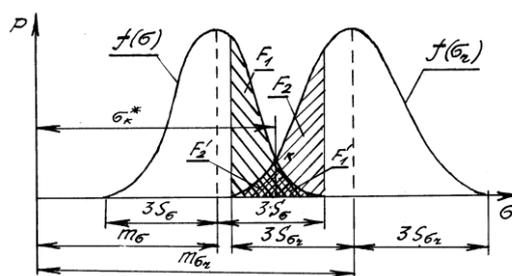


Рис. 5. Определение параметров надежности

На основании соотношения площадей и кривых $f(\sigma)$ и $f(\sigma_r)$ см. рисунок 5, вероятность безотказной работы (гарантия неразрушения) для одного из вариантов определяется

$$\Gamma(\sigma) = 1 - \frac{\frac{1}{s_\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\sigma_i}^{m_{\sigma_r} - 3s_{\sigma_r}} e^{-\frac{(\sigma - m_\sigma)^2}{2s_\sigma^2}} d\sigma}{\left(1 - \frac{1}{s_\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\sigma_i}^{m_{\sigma_r} + 3s_{\sigma_r}} e^{-\frac{(\sigma - m_\sigma)^2}{2s_\sigma^2}} d\sigma\right) + \left(1 - \frac{1}{s_{\sigma_r} \sqrt{2\pi}} \int_{\sigma_i}^{\sigma_r} e^{-\frac{(\sigma - m_{\sigma_r})^2}{2s_{\sigma_r}^2}} d\sigma\right)}$$

Комплексный метод анализа напряженно – деформированного состояния позволяет обеспечить прогнозирование зарождения и рост трещин в коленчатом вале при использовании зависимостей механики разрушения.

Дальнейшее развитие эти методы численного анализа НДС получили при использовании накопленного экспериментального и теоретического материала на основе критериев локального разрушения, в основу которых положены энергетический подход Гриффитса и силовой подход Ирвина, использования критерия трещиностойкости на основе энергетического интеграла Черепанова – Райса для нахождения компонент вектора потока энергии при трещинообразовании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попович В.С. Расчет на прочность коленчатых валов двигателей внутреннего сгорания по неразрезной схеме: Методическая разработка. - Барнаул:1980.-55с.
2. Попович В.С. Численные методы анализа напряженного и деформированного состояния двигателей внутреннего сгорания. Учеб. пособие / Алт. политехн. ин-т им.И.И.Ползунова. - Барнаул:1991.-83с.
3. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс: Пер.с англ.-М.:Радио и связь,1988.-128 с.
4. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации.- М.: Изд-во МАИ,1995.-344с.