МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ В СМЕЖНЫХ ПРОНИЦАЕМЫХ КАНАЛАХ

А.Г. Овчаренко, Ф.Ф. Спиридонов, Т.М. Тушкина

Объектом исследования является динамика двухфазного потока в модуле мембранного аппарата. В качестве закона проницания мембраны принят обобщенный закон Дарси. Цель работы – создание физико-математической модели двухфазного течения, исследование влияния параметра проницания на движение жидкой и твердой фазы, деформацию мембраны.

Каналы с проницаемыми стенками находят широкое применение в технологических аппаратах химического, биологического и др. производств. В частности, каналы со стенками в виде полупроницаемых мембран используются для очистки жидких сред от ультрадисперсных примесей. Для надежного проектирования технологических установок необходимо знание гидродинамики потоков в рабочем канале. Имеющаяся информация по данному вопросу носит, в основном, эмпирический характер, что не позволяет использовать ее с достаточной степенью надежности для расчета оборудования. Поэтому математическое моделирование гидродинамики в каналах мембранных аппаратов является актуальной темой. В данной работе исследованы закономерности движения жидкой среды и мелких твердых частиц в осесимметричных рабочих каналах мембранных аппаратов.

Течение жидкости при наличии ультрадисперсной примеси осуществляется в цилиндрической установке с закрытым левым торцом (рис. 1), разделенной проницаемой пленкой (мембраной) на две части: дренажный канал (зона 2), снабженный справа расходной диафрагмой и напорный канал между мембраной и корпусом (зона 1).

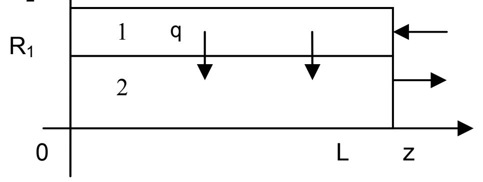


Рисунок 1 − Схема течения жидкости в фильтрующем аппарате: 1 – напорный канал; 2 – дренажный канал

Через общую пористую границу осуществляется вдув (отсос) со скоростью, подчиняющейся обобщенному закону Дарси

$$q = a \cdot (\Delta p)^n . \qquad (1)$$

Здесь Δp - перепад давления на мембране, *n* – константа проницания, которая характеризует физические свойства мембраны.

Исследование проводится в рамках следующих допущений. Для жидкой фазы принята модель несжимаемой жидкости с исчезающей вязкостью ($\rho = const$, $\nu \to 0$). Для твердой фазы принят Стоксов закон сопротивления. Полагается, что концентрация крупных частиц примеси мала, что позволяет пренебречь обратным влиянием дисперсной фазы на жидкую и рассматривать движение фаз независимо друг от друга.

В рамках наложенных ограничений для исследования движения жидкой фазы в цилиндрической системе координат (*z, r*) аналитически была решена [1] система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (r w_i)}{\partial z} + \dfrac{\partial (r v_i)}{\partial r} = 0 \\ w_i \dfrac{\partial w_i}{\partial z} + v_i \dfrac{\partial w_i}{\partial r} = -\dfrac{dp_i}{dz} \end{cases} \qquad (2)$$

с граничными условиями следующего вида:

1. Непроницаемые стенки каналов (*z*=0): $w_i=v_i=0$; ($r=R_2$) $w_1=v_1=0$;
2. Мембрана ($r=R_1$): $w_1=w_2=0$, $v_1=v_2=-q$;
3. Ось симметрии (r=0): $v_2=0$, $\dfrac{\partial w_2}{\partial r} = 0$.

Здесь *w* и *v* – составляющие вектора скорости вдоль осей *z* и *r*, значение параметра *i* совпадает с номером зоны (1 или 2). Равенство (1), уравнения системы (2) и граничные условия записаны в безразмерном виде. Переход к размерным переменным может быть осуществлен умножением на масштабы: R_2^*, q_0^* (опорное значение скорости проницания), $p_н^*$ (нормальное атмосферное давление).

Решение систем (2), удовлетворяющее граничным условиям, искалось в виде

$$w_1 = -\frac{\pi}{R_2^2 - R_1^2} f_1(z) sin \frac{\pi}{2} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad (3)$$

$$w_2 = \frac{\pi}{R_1^2} f_2(z) cos \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{R_1^2},$$

$$v_1 = -\frac{1}{r} f_1{}'(z) cos \frac{\pi}{2} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2},$$

$$v_2 = -\frac{1}{r} f_2{}'(z) sin \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{R_1^2},$$

где $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Выражения (3) удовлетворяют первым уравнениям систем (2). Можно доказать, что

$$f_1(z) = f_2(z). \quad (4)$$

В дальнейшем индекс *i*=1,2 у $f_i(z)$ опущен.

В результате подстановки (3) во вторые уравнения систем (2), их интегрирования и последующего вычитания с учетом равенств (1), (4) было получено обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f'(z) = d \cdot f^{2n}(z), \quad (5)$$

здесь $d = a\left(\frac{\pi^2}{2p_н} \cdot \frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 - R_1^4}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 R_1^4}\right)^n$.

Решением уравнения (5), удовлетворяющим начальному условию $f(0) = 0$, является функция

$$f(z) = \left[(1-2n)d \cdot z\right]^{\frac{1}{1-2n}}.$$

Таким образом, кинематику течения в плоском мембранном модуле описывают следующие соотношения:

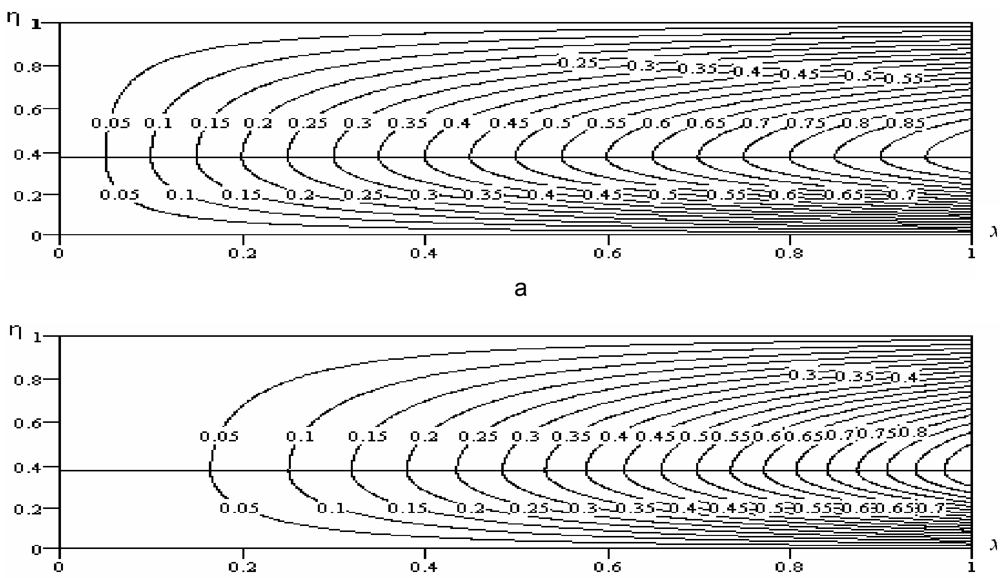
$$w_1 = -\frac{\pi}{R_2^2 - R_1^2}\left[(1-2n)d \cdot z\right]^{\frac{1}{1-2n}} sin \frac{\pi}{2} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad (6)$$

$$w_2 = \frac{\pi}{R_1^2}\left[(1-2n)d \cdot z\right]^{\frac{1}{1-2n}} cos \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{R_1^2},$$

$$v_1 = -\frac{1}{r}\left[(1-2n)z\right]^{\frac{2n}{1-2n}} d^{\frac{1}{1-2n}} \cdot cos \frac{\pi}{2} \frac{r - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2},$$

$$v_2 = -\frac{1}{r}\left[(1-2n)z\right]^{\frac{2n}{1-2n}} d^{\frac{1}{1-2n}} \cdot sin \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{R_1^2}.$$

Анализ зависимостей (6) показал, что малому изменению параметра n в диапазоне его значений соответствует достаточно сильное изменение градиентности течения. Этот факт отражен на рис. 2, где в системе координат (*x*, η) представлены линии тока в рассматриваемом канале при *n*=0, *n*=0,2 (рис. 2 а, б соответственно). Здесь $x = \frac{z}{L}$, $\eta = \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$.



а

б

Рисунок 2 − Картина течения в мембранном аппарате при различных значениях параметра проницания n: а – n=0; б – n=0,2

Как видно из рисунка, параметр n оказывает существенное влияние на концентрацию линий тока в непосредственной близости от тупиковой зоны канала, поскольку при увеличении значения n линии тока становятся все более разреженными вблизи левой стенки установки.

Для исследования вопроса о движении мелких частиц примеси в поле течения, задаваемого соотношениями (6), поставлена задача:

$$Stk\frac{dw_p}{dt} = w - w_p, \qquad Stk\frac{dv_p}{dt} = v - v_p,$$
$$\frac{d\xi_p}{d\tau} = w_p, \qquad \frac{1}{L\lambda(1-2n)}\frac{d\eta_p}{d\tau} = v_p. \qquad (7)$$

Здесь $w = -\sin\frac{\pi}{2}\eta_p$ и $v = -\frac{\beta}{\xi_p}\cos\frac{\pi}{2}\eta_p$, индекс «*p*» определяет параметры частицы примеси, $Stk = \frac{1}{18}\rho_p\frac{d_p^2}{\mu}\frac{w_{max}}{L}$ - число Стокса, μ – вязкость жидкости, ρ_p, d_p – плотность и диаметр частицы примеси; $\lambda = \frac{R_2^2 - R_1^2}{\pi(1-2n)}$.

Начальные условия для искомых переменных системы (7) следующие:

$$\tau_0 = 0 \qquad x_0 = 1, \qquad \eta_0 = \eta_{00}, \qquad v_{po} = 0,$$
$$w_{po} = -1, \; \eta_{00} \in [0,1].$$

Система (7) с начальными условиями представляет собой задачу Коши, решения которой определяют траекторию и значения составляющих скорости движения частицы примеси в рабочем канале (зона 1).

Прежде, чем было найдено решение системы (7), было исследовано его поведение при $\sigma \to 0$, а также при некоторых аппроксимациях компонент вектора скорости.

Так, в соответствии с двумя первыми уравнениями (7), $w_p \to w$ и $v_p \to v$ при $\sigma \to 0$, что означает равновесное движение жидкой и дисперсной фаз.

В общем случае w_p представлено в виде суммы ряда по малому параметру σ:

$$w_p = w - g_1\cdot\sigma - g_2\cdot\sigma^2 - \ldots - 0(\sigma^n),$$

или

$$w - w_p = g_1\cdot\sigma + g_2\cdot\sigma^2 + \ldots + 0(\sigma^n). \qquad (8)$$

Заменив левую часть равенства (8) в соответствии с первым уравнением системы (7), ограничились далее главным членом разложения (8). Тем самым получено приближенное равенство:

$$\frac{dw_p}{dt} = g,$$

где $\frac{dw_p}{dt} \approx \frac{dw}{dt}$; $g = g_1$ зависит либо от пространственных координат, либо от времени.

Производная $\frac{dw}{dt}$ представлена в виде:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z} + v\frac{\partial w}{\partial y},$$

с учетом того, что $\frac{\partial w}{\partial t} \approx 0$, при условии v<<w получено:

$$w_p \approx w\left(1 - \sigma\frac{\partial w}{\partial z}\right), \text{ или}$$
$$w_p \approx w\left(1 - \sigma\frac{dw}{dz}\right). \qquad (9)$$

С помощью (9) была оценена разница в скоростях жидкой и дисперсной фаз при различных зависимостях w(z). В частности:

1. При w=const: $\frac{dw}{wz} = 0$, а значит, в соответствии с (9), $w_p \approx w$;
2. При $w \approx z$: $w_p \approx w(1-\sigma)$, частица "отстает" от жидкости, причем, при увеличении σ от 0 до 1 "отставание" возрастает;
3. При $w \approx -z$: $w_p \approx w(1+\sigma)$, скорость частицы в (1+σ) раз больше скорости жидкости, частица "опережает" жидкость, при этом, разница в скоростях тем больше, чем больше величина числа Стокса σ.

Аналогичная оценка была произведена и для степени отклонения траекторий частиц примеси от линий тока жидкости. Например, если

$$w_p \approx w(1-\sigma),$$

то из уравнения

$$\frac{dz_p}{dt} \approx (1-\sigma)\frac{dz}{dt}$$

следует, что

$$\frac{dz_p}{dy} \approx (1-\sigma)\frac{dz}{dy}.$$

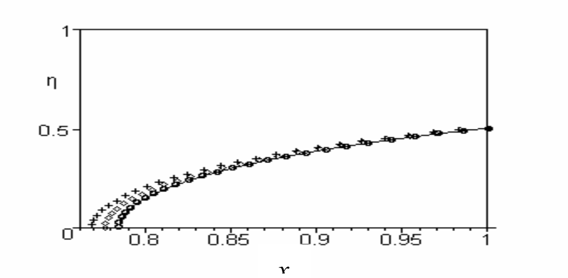
В результате интегрирования последнего уравнения получено

$$z_p \approx z_{p0} + (1-\sigma)\cdot z'_y(y)\cdot(y - y_0). \qquad (10)$$

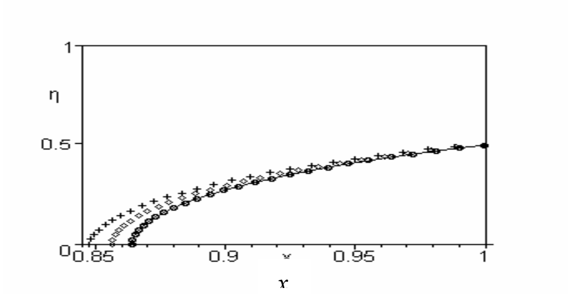
Уравнение (10) позволяет выполнить оценку траекторий частиц примеси. При этом, $z'_y(y)$ − функция углового коэффициента линий тока жидкой фазы, величина (1-σ) определяет отличие траектории частицы примеси от линии тока жидкой фазы.

Первые два уравнения системы (7) содержат в правой части соответственно разницу продольной и поперечной компонент векторов скоростей жидкости и частиц примеси. Эти величины достаточно малы при малых значениях чисел Стокса *Stk*, что указывает на возможную жесткость системы. Система (7) была решена численно с использованием многошагового метода Гира.

Было исследовано [2] отличие траекторий частиц от линий тока при различных значениях числа Стокса *Stk*, параметра *n*, определяющего закон проницаемости мембраны. Траектории движения твердых частиц в зависимости от их диаметров (x - 100 мкм, □ - 75 мкм, о – 50 мкм) и соответствующие линии тока (сплошная линия), представлены на рис. 3 (а, б) соответственно при *n*=0 и 0,2.



а



б

Рисунок 3 − Траектории твердых частиц разных диаметров и соответствующая линия тока жидкости в напорном канале при $\eta_{00} = 0{,}5$ и различных значениях параметра n: а – n=0, б – n=0,2; - линия тока жидкости, ^{x} - траектория частицы диаметром 100 мкм, ◊ - траектория частицы диаметром 75 мкм,^{o} - траектория частицы диаметром 50 мкм

Как видно из рис.3, частицы относительно малых размеров следуют по линиям тока, кроме того, начиная с некоторого значения d_p, течение становится существенно неравновесным. Для течения в данной области характерно "опережение" частиц примеси линий тока. Это – результат зависимости w≈-z продольной компоненты вектора скорости от длины напорного канала.

Влияние параметра *n*, в основном, заключается в уменьшении отклонения траекторий частиц от соответствующих линий тока при увеличении его значения.

Осаждение на мембране характерно для частиц, "стартующих" с разной высоты η_{00} напорного канала. Этот факт также является результатом принятой в данной модели аппроксимации для продольной и поперечной компонент вектора скорости частиц примеси.

В настоящей работе определены напряжения и деформации, возникающие на мембране под воздействием внутреннего и внешнего давлений, а также исследовано влияние, которое оказывает закон проницания (1) на зону и величину максимального прогиба мембраны.

Рассуждения проводились в рамках допущений:

1. Деформации мембраны в процессе фильтрации малы и близки к линейным (закон Гука);

2. В радиальном направлении деформации мембраны больше, чем в осевом или азимутальном;

3. Объем мембраны в процессе фильтрации не меняется;

4. Сила $\overline{T}$ натяжения мембраны меняется незначительно, т.е. $\overline{T} \cong \overline{T}_0$. Здесь индекс 0 указывает на начальное положение мембраны OC_0L (рис. 4), соответствующее $\vec{p} = 0$, где $\vec{p}$ - сосредоточенная сила.

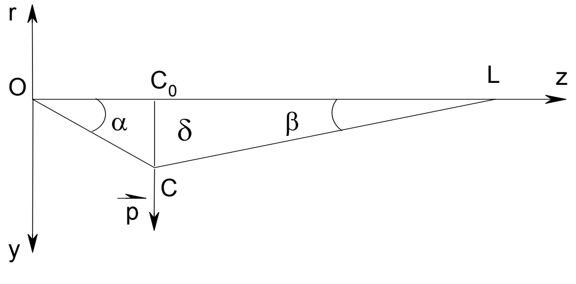


Рис. 4

5. Работа на растяжение много больше работы на сжатие.

Пусть $\vec{p} \neq 0$ соответствует положение мембраны OCL, а с системе zOy точка C имеет координаты z=ξ и y=δ. В предположении незначительных деформаций мембраны в процессе фильтрации, что соответствует случаю малых углов α и β, запишем приближенные равенства:

$$\sin\alpha \approx \frac{\delta}{\xi};\ \sin\beta \approx \frac{\delta}{L-\xi}. \qquad (11)$$

Условие равновесия имеет вид:

$$T_0 \sin\alpha + T_0 \sin\beta = P. \qquad (12)$$

С учетом равенств (11) уравнение (12) принимает вид:

$$\frac{\delta}{\xi} = P\frac{L-\xi}{T_0 L}.$$

Пусть $y(z)$ - прогиб мембраны, тогда

$$y(z) = P \cdot G(z,\xi), \qquad (13)$$

где

$$G(z,\xi) = \begin{cases} \dfrac{z(L-\xi)}{T_0 L}, 0 \le z \le \xi \\ \dfrac{z(L-\xi)}{T_0 L},\ \xi \le z \le L \end{cases}$$ - функция влияния.

Можно показать, что имеет место следующее равенство:

$$\frac{y(z)}{\delta(\xi)} = \frac{z}{\xi}.$$

С учетом равенства (13) последнее соотношение принимает вид:

$$\frac{P \cdot G(z,\xi)}{\delta(\xi)} = \frac{z}{\xi}.$$

Следовательно,

$$G(z,\xi) = \frac{z\delta(\xi)}{P \cdot \xi} = \frac{z(L-\xi)}{T_0 L}. \qquad (14)$$

Из соотношения (14) следует, что

$$G(z,\xi) = G(\xi,z).$$

Перемещение на элементарном участке мембраны $[\xi, \xi+\Delta\xi]$ определяется выражением:

$$G(z,\xi)P(\xi)\Delta\xi.$$

Исходя из принципа суперпозиции, имеем равенство $y \approx \sum_{\xi} G(z,\xi)P(\xi)\Delta\xi$ или в пределе

$$y(z) = \int_0^L G(z,\xi)P(\xi)d\xi. \qquad (15)$$

Равенство (15) позволяет при заданной нагрузке $P(\xi)$ определить величину перемещения *y(z)* мембраны в процессе фильтрации.

В рассматриваемом случае нагрузка $P(\xi) = p(\xi)$, т.е. распределение давления вдоль мембраны, определяется равенством

$$p(\xi) = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 - R_1^4}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 R_1^4}\right)\left((1-2n)d \cdot \xi\right)^{\frac{2}{1-2n}}. \qquad (16)$$

После подстановки выражения (16) в уравнение (15), получено следующее выражение для *y(z)*: $y(z) =$

$$= \int_0^L G(z,\xi)\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 - R_1^4}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 R_1^4}\right)\left((1-2n)d \cdot \xi\right)^{\frac{2}{1-2n}} d\xi =$$

$$= \frac{\pi^2\left((1-2n)d\right)^{\frac{2}{1-2n}}}{2T_0 L}\left(\frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 - R_1^4}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 R_1^4}\right) x$$

$$x\left(\int_0^z \xi(L-z)\xi^{\frac{2}{1-2n}} d\xi + \int_z^L z(L-\xi)\xi^{\frac{2}{1-2n}} d\xi\right). \qquad (17)$$

При различных значениях параметра *n* интеграл (17) позволяет определить величину прогиба мембраны, возникающего в процессе фильтрации.

Например, при *n*=0 выражение (17) принимает вид:

$$y(z) = \frac{\pi^2 a^2}{2T_0 L}\left(\frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 - R_1^4}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 R_1^4}\right) \cdot \Big(\int_0^z (L-z)\xi^3 d\xi +$$

$$+ \int_z^L z(L-\xi)\xi^2 d\xi\Big).$$

В результате вычисления интегралов, входящих в правую часть последнего равенства, получено:

$$y(z) = \frac{\pi^2 a^2}{12T_0 L}\left(\frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 - R_1^4}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 R_1^4}\right) z\left(L^3 - z^3\right). \qquad (18)$$

Было установлено, что максимум функции (18) наблюдается при $z \approx 0{,}63L$. Таким образом, здесь наблюдается зона максимального прогиба мембраны. При этом величина максимального прогиба принимает значение, равное $\dfrac{0{,}39a^2L^3}{T_0}\left(\dfrac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 - R_1^4}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 R_1^4}\right)$.

Аналогично были определены зоны и величины максимальной деформации проницаемой стенки при некоторых других значениях *n,* в частности, при *n*=0,1 и *n*=0,3.

Полученные результаты позволяют утверждать, что на величину максимального прогиба мембраны оказывают влияние параметры, определяющие геометрию рабочего и дренажного каналов: L, R_1 и R_2 , а также параметры *a* и *n*, характеризующие физические свойства мембран. При этом, влияние первых четырех из указанных выше параметров на деформацию мембраны различно при разных значениях *n*].

Установлено, что при возрастании параметра *n* зона максимального прогиба мембраны располагается все ближе к входному сечению рабочего канала (зона 1). Отмеченный факт является следствием того, что в указанной зоне наблюдается наибольшее осаждение частиц примеси. Так, при *n*=0 наибольшее осаждение частиц примеси происходит в сечении, соответствующем $z \approx 0{,}63L$, при $n=0{,}1$ – $z \approx 0{,}6507L$, при $n=0{,}3$ – $z \approx 0{,}7230$

Наблюдающаяся деформация мембраны повлечет за собой изменение граничных условий в канале, что в свою очередь приведет к перестройке течения. При этом возможны различные варианты развития геометрии напорного канала во времени.

Один из них заключается в следующем. Прогиб мембраны повлечет за собой уменьшение значений средней скорости в напорном канале и ее увеличение в дренажном, что неизбежно приведет к росту перепада давлений на проницаемой стенке. В свою очередь, увеличение перепада давлений на мембране спровоцирует еще больший прогиб и т.д. Значит, при недостаточной прочности мембраны возможен ее разрыв.

Если упругие силы будут восстанавливать равновесие системы, то проницаемая поверхность может перейти из статического в колебательный режим. Этот механизм, возможно, является одной из причин наблюдающегося разрушения мембран.

Поведенные исследований позволяют утверждать, что закон проницаемости мембраны оказывает непосредственное влияние на движение жидкой и твердой фазы в модуле фильтрационного аппарата и деформацию мембраны.

Выводы

1. Уравнения гидромеханики допускают существование однопараметрического класса автомодельных решений рассмотренной задачи. Частным случаем (n=0) является известное решение Бермана-Тейлора [3].
2. Незначительному изменению параметра n в окрестности $n=0$ соответствует достаточно существенное изменение структуры течения: при неизменных профилях *v*- и *w*-компонент вектора скорости в зонах 1 и 2 градиентность течения изменяется довольно сильно.
3. Малое изменение значения n приводит к существенной перестройке движения одиночной частицы примеси, изменению зоны и величины максимальной деформации мембраны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тушкина Т.М. Моделирование течений в мембранных каналах: Автореф. дис. канд. физ-мат. наук. – Бийск, 2002. – 20 с.
2. Овчаренко А.Г., Спиридонов Ф.Ф., Тушкина Т.М. Исследование двухфазного течения в каналах с общей проницаемой границей// Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: Тезисы докладов Всероссийской конференции с участием зарубежных учёных 4 – 8 июля 2005 года, Бийск. – Новосибирск: Изд-во Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2005. − С. 57.
3. Berman A.S. Laminar flow in channels with porous walls// J. Appl. Phys. 1953. V.24, N9. − P.1232-1235.