

# ПРОБЛЕМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРЕДЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ОБОЛОЧЕК

А.В. Налимов, Ю.В. Немировский

*Задачи предельно равновесия осесимметрических оболочек сводятся к решению многоточечных краевых задач для систем нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений на неопределенной области. Решению этих задач уделяли внимание многие авторы, но полные решения исчисляются единицами. Большая часть этих решений построено в квадратурах, а многочисленные попытки численного решения этих задач, оказались неудачными. В работе анализируются причины этих обстоятельств и показано, что используемые методы аппроксимации производных противоречат положениям теории жесткопластических оболочек.*

## **Введение**

Решению задач предельного равновесия оболочек посвящено большое число работ [1–5], но полные решения построены только для цилиндрических и пологих оболочек нулевой гауссовой кривизны из изотропного материала с кусочно-линейным потенциалом [6–8]. Для оболочек других форм, как правило, на основе статической и кинематической теорем [9] определяют оценки несущей способности. Широкое распространение эти методы получили, в том числе и потому, что не было сформулировано необходимое для вычисления предельной нагрузки соотношение. Впервые такое соотношение было получено в работе [6] для цилиндрических оболочек на основе равенства нулю приращения потенциала, а в [10] при помощи принципа максимума Л.С. Понтрягина. Для оболочек других геометрических форм, такого типа соотношение было получено позднее в работе [11], как на основе равенства нулю приращения потенциала, так и при помощи принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Обычно при решении задач предельного равновесия оболочек из материала с кусочно-линейным условием пластичности предполагают, что ребра поверхности текучести реализуются только в одном сечении. При таких предположениях задачи предельного анализа оболочек сводятся к решению многоточечных краевых задач для систем нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений на неопределенной области [12]. Границы сопряжения областей, где выполняются различные куски поверхности текучести и порядок их реализации заранее неизвестны, краевые условия и условия сопряжения описываются нелинейными соотношениями, а искомые функции разрывные [12]. Более того, для оболочек из гетерогенных материалов условие текучести является

функцией координат [13]. В таких конструкциях в пределах области течения возможны реализации всевозможных комбинаций пластических режимов, что существенно усложняет задачу определения их последовательности.

Отметим еще, что теорема единственности для жесткопластического тела доказана при предположении о постоянстве диссипации энергии на пластических шарнирах [9]. В работе [14] показано, что условия теоремы [9] не всегда выполняются и при различных механизмах течения существуют точные решения задачи, доставляющие разные значения предельной нагрузки. Поэтому для рассматриваемых задач необходимо определить механизм течения, обеспечивающий наименьшее значение предельной нагрузки.

Проблему определения механизма течения можно решить аналогично [15]. При этом следует отметить, что даже при известном механизме течения численное решение задачи не всегда удается построить.

В данной работе анализируются причины этого обстоятельства.

## **Анализ методов решения**

Методы численного решения многоточечных краевых задач применительно к рассматриваемым задачам можно разбить на три группы. Методы типа [16], где решение задачи сводится к решению ряда задач Коши. Ко второй группе отнесем методы решения многоточечных краевых задач, основанные на представлении неизвестных функций в виде обобщенных многочленов или сплайнов, а коэффициенты определяются методом взвешенных невязок, коллокаций, Галеркина, наименьших квадратов и т.д. [17]. Среди таких аппроксимаций наиболее широкое распространение получили сплайны первой степени. Эти методы отнесем к третьей группе.

При использовании методов типа [16] не всегда удается обеспечить гладкую зависимость уравнений сшивания от начальных параметров. Это связано с тем, что искомые функции разрывные, а при реализации некоторых пластических режимов система дифференциальных уравнений является жесткой [6]. Поэтому численный процесс решения соответствующей многоточечной краевой задачи является неустойчивым и не гарантирует необходимую точность.

При использовании методов второй группы, например [17], в пределах каждого шага интегрирования  $(y \in [y_i^{(k)}, y_{i+1}^{(k)}])$  ( $i = 0, N-1$ );  $y_0^{(k)} = 0$ ;  $y_N^{(k)} = 2$ ;  $Y = l_0 y$  – координата по оси вращения;  $2l_0$  – длина оболочки по оси вращения; индекс  $k$  – обозначает номер итерации) искомые функции аппроксимируют обобщенными многочленами или сплайнами. По сути это означает, что на каждом шаге интегрирования поверхность текучести аппроксимируют цилиндром в пространстве обобщенных напряжений. Определенный таким способом вектор обобщенных напряжений  $\vec{T}(y) = (t_1, t_2, m_1, m_2)'$  (здесь  $t_j = \frac{1}{2\sigma_0 H} \int_{-1}^1 \sigma_{jj} d\zeta$ ;  $m_j = \frac{1}{\sigma_0 H^2} \int_{-1}^1 \sigma_{jj} \zeta d\zeta$ ;  $\sigma_0$  – константа размерности напряжений;  $2H$  – толщина оболочки) может достигать поверхности текучести  $F(\vec{T}, y_i^{(k)}) = 0$ , а при  $y \in (y_i^{(k)}, y_{i+1}^{(k)})$  не достигать ее  $F(\vec{T}, y) < 0$  (реализуется жесткое состояние) или выходить за ее пределы  $F(\vec{T}, y) > 0$  (в рамках жесткопластического тела это недопустимо [9]). Таким образом, в результате численной процедуры невогнутая поверхность  $F(\vec{T}, y) = 0$  заменяется некоторой в общем случае вогнутой поверхностью  $F_N^{\in(k)}(\vec{T}, y) = 0$ , образованной совокупностью  $N$  цилиндров  $G_N(\vec{T}, y) = 0$ . Вогнутые поверхности текучести типа  $F_N^{\in(k)}(\vec{T}, y) = 0$  противоречат принципу максимума и общим соотношениям [9]. В этих случаях для систем разрешающих уравнений условия единственности не выполняются, что и определяет неустойчивость численного процесса.

При использовании методов третьей группы, например [18], неизвестные функции аппроксимируют сплайнами первой степени.

В этом случае в пределах каждого шага интегрирования  $y \in [y_i^{(k)}, y_{i+1}^{(k)}]$  поверхность текучести  $F(\vec{T}, y) = 0$  будем аппроксимировать гиперплоскостями вида:

$$f_i^{(k)}(\vec{T}, y) = \alpha_j^{(i,k)} t_j + \beta_j^{(i,k)} m_j - \gamma^{(i,k)} = 0, \quad (1)$$

$$(j = 1, 2), \quad (y_i^{(k)} \geq y_0^{(k)}; y_{i+1}^{(k)} \leq y_N^{(k)}).$$

Поскольку состояния  $F(\vec{T}, y) > 0$  недопустимы, то коэффициенты  $\alpha_j^{(i,k)}, \beta_j^{(i,k)}, \gamma^{(i,k)}$  будем выбирать так, чтобы для любого  $\vec{T}(y) \in [y_i^{(k)}, y_{i+1}^{(k)}]$ , удовлетворяющего соотношению  $f_i^{(k)}(\vec{T}, y) = 0$ , выполнялось неравенство  $F(\vec{T}, y) \leq 0$ . Например, в узлах  $y_i^{(k)}$  вектор обобщенных напряжений  $\vec{T}(y_i^{(k)})$  соответствует поверхности текучести  $F(\vec{T}, y_i^{(k)}) = 0$ , а отклонение  $f_i^{(k)}(\vec{T}, y) = 0$  от поверхности текучести минимально. Тогда для вычисления пяти искомых коэффициентов имеют место следующие соотношения:

$$F(\vec{T}, y_i^{(k)}) = 0; \quad F(\vec{T}, y_{i+1}^{(k)}) = 0;$$

$$\left\| \int_{f_i^{(k)}(\vec{T}, y) \geq 0; y \in [y_i^{(k)}, y_{i+1}^{(k)}]} d\Omega - \int_{F(\vec{T}, y) \leq 0; y \in [y_i^{(k)}, y_{i+1}^{(k)}]} d\Omega \right\| \rightarrow \min,$$

$$d\Omega = dt_1 dt_2 dm_1 dm_2.$$

Приближенную поверхность, образованную гиперплоскостями  $f_j^{(k)}(\vec{T}, y) = 0$ , будем обозначать выражением  $G_N^{(k)}(\vec{T}, y) = 0$ , а траекторию вектора обобщенных напряжений –  $\Gamma_N^{(k)}(\vec{T}, y) = 0$ . Для такой кривой всегда можно построить линейчатую поверхность текучести  $F_N^{\in(k)}(\vec{T}, y) = 0$  так, что  $\Gamma_N^{(k)}(\vec{T}, y) = 0$  находится на этой поверхности и  $F_N^{\in(k)}(\vec{T}, y) = 0$  является вписанной по отношению к  $F(\vec{T}, y) = 0$ .

Согласно теоремам предельного равновесия [9] предельная нагрузка, определенная

на основе вписанных поверхностей текучести  $F_N^{(k)}(\vec{T}, y) = 0$ , не превосходит истинное значение. Уменьшая шаг интегрирования  $h_i^{(k)} = (y_{i+1}^{(k)} - y_i^{(k)})$ , можно построить последовательность вписанных поверхностей таких, что  $|F(\vec{T}, y) - \hat{F}_N^{(k)}(\vec{T}, y)| \xrightarrow{h_i^{(k)} \rightarrow 0} 0$ .

Принимая справедливость гипотез Кирхгофа–Лява, уравнения равновесия осесимметрических оболочек записываются в виде [19]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}(Rt_1) &= -\mu_1 t_2 - \frac{R_*}{R_1} Q - X; \\ \frac{d}{dy}(RQ) &= R_* \left( \frac{t_1}{R_1} + \frac{t_2}{R_2} \right) - Z; \\ \frac{d}{dy}(Rm_1) &= \frac{2R_*}{H} Q - \mu_1 m_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mu_1 = I_0 \tan \xi$ ;  $R_* = I_0 R_2$ ;  $X = \frac{\bar{X} R_*}{2\sigma_0 H}$ ;

$Z = \frac{\bar{Z} R_*}{2\sigma_0 H}$ ;  $\bar{X} = x_1 + \lambda_0 x_2$ ,  $\bar{Z} = z_1 + \lambda_0 z_2$  – касательная и нормальные поверхностные нагрузки;  $Q = \frac{1}{2\sigma_0 H} \int_{-1}^1 \sigma_{13} d\zeta$  – перерезывающее

усилие;  $\lambda_0$  – параметр нагрузки;  $\frac{dR}{ds} = -\sin \xi$ ;

$\frac{dY}{ds} = \cos \xi$ ;  $R_1 ds = dy$ ;  $R = R_2 \cos \xi$  – расстояние от оси вращения  $Y$  до срединной поверхности;  $R_j$ , ( $j = 1, 2$ ) – радиусы кривизны срединной поверхности;  $\xi$  – угол между осью вращения и касательной к образующей оболочки;  $s$  – координата вдоль образующей.

Кинематические соотношения – связь скоростей деформаций и перемещений записываются в виде [9, 19]:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{01} &= \mu_2 \frac{d\dot{u}}{dy} + \frac{\dot{w}}{R_1}; \quad \dot{\chi}_1 = -\mu_2 \frac{H}{2} \frac{d\dot{V}}{dy}; \\ \dot{\varepsilon}_{02} &= \frac{(\dot{w} \cos \xi - \dot{u} \sin \xi)}{R}; \quad \dot{\chi}_2 = \mu_3 \dot{V}; \\ \dot{V} &= \mu_2 \frac{d\dot{w}}{dy} - \frac{\dot{u}}{R_1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mu_2 = \cos \xi / I_0$ ;  $\mu_3 = \frac{H \sin \xi}{2 R}$ ;  $\mu_4 = \frac{I_0 R}{R_1 \sin \xi}$ .

Скорости деформаций удовлетворяют условиям неразрывности [19]:

$$\begin{aligned} \frac{d(R\dot{\varepsilon}_{02})}{dy} + \mu_1 \dot{\varepsilon}_{01} - \dot{\chi}_2 \left( \frac{I_0}{\mu_3} \right) &= 0; \\ \frac{d(R\dot{\chi}_2)}{dy} + \mu_1 \dot{\chi}_1 - \mu_4 \dot{\chi}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

или

$$\frac{dq}{dy} = - \left( \frac{I_0}{\sin \xi H} \right) - \frac{\mu_4}{R} q + \frac{\mu_1}{R} (q - n) \frac{\dot{\chi}_1}{\dot{\chi}_2}, \quad (6)$$

где  $n = -\dot{\varepsilon}_{01} / (2\dot{\chi}_1)$ ;  $q = -\dot{\varepsilon}_{02} / (2\dot{\chi}_2)$ ;  $n, q \in [-1, 1]$ .

Далее следуя постулату Друккера, предполагают [4], что геометрическое место точек поверхности текучести определяет потенциал для соответствующих скоростей деформаций. Тогда соотношения связывающие скорости деформаций и обобщенные напряжения определяются ассоциированным законом течения [4]:

$$\dot{\varepsilon}_{0j} = \lambda \frac{\partial F(\vec{T}, y)}{\partial t_j}; \quad \dot{\chi}_j = \lambda \frac{\partial F(\vec{T}, y)}{\partial m_j}, \quad (7)$$

где  $\lambda$  определяется с точностью до постоянного множителя.

При аппроксимации поверхности текучести  $F(\vec{T}, y) = 0$  гиперплоскостями типа (1) на каждом шаге интегрирования  $y \in [y_i^{(k)}, y_{i+1}^{(k)}]$  из (7) получим:

$$\dot{\varepsilon}_{0j} = \lambda \alpha_j^{(i,k)}; \quad \dot{\chi}_j = \lambda \beta_j^{(i,k)}. \quad (8)$$

В четырехмерном пространстве норма  $\|\circ\| = \sqrt{(\circ, \circ)}$  вектора скоростей деформаций,  $\vec{\dot{\varepsilon}} = (\dot{\varepsilon}_{01}, \dot{\varepsilon}_{02}, \dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2)^T$  определяется с точностью до постоянного множителя  $\lambda$ , а направление задается тремя соотношениями типа  $\frac{\alpha_1^{(i,k)}}{\alpha_2^{(i,k)}}, \frac{\alpha_2^{(i,k)}}{\beta_2^{(i,k)}}, \frac{\beta_1^{(i,k)}}{\beta_2^{(i,k)}}$ . Откуда учитывая (8) получим:

$$\begin{aligned} \beta_2^{(i,k)} \dot{\chi}_1 &= \beta_1^{(i,k)} \dot{\chi}_2; \quad \beta_2^{(i,k)} \dot{\varepsilon}_{02} = \alpha_2^{(i,k)} \dot{\chi}_2; \\ \alpha_2^{(i,k)} \dot{\varepsilon}_{01} &= \alpha_1^{(i,k)} \dot{\varepsilon}_{02}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что для определения скоростей перемещений  $\dot{u}, \dot{w}, \dot{V}$  достаточно двух уравнений (9). В частности из первого и третьего уравнения (9) и (4)–(5) после интегрирования получим:

$$\dot{\varepsilon}_{02}R = \rho \left( (\dot{\varepsilon}_{02}R)(y_i^{(k)}) + \dot{V}(y_i^{(k)}) I_0 \int_{y_i^{(k)}}^y \frac{\eta}{\rho} dy \right); \quad \dot{V}(y) = \dot{V}(y_i^{(k)}) \eta, \quad (10)$$

$$\text{где } \eta = \left( R(y)/R(y_i^{(k)}) \right)^{\left( \beta_1^{(i,k)}/\beta_2^{(i,k)} \right)};$$

$$\rho = \eta^{\left( \alpha_1^{(i,k)}\beta_2^{(i,k)}/\alpha_2^{(i,k)}\beta_1^{(i,k)} \right)}.$$

Введем обозначения:

$$\varphi_1 = \rho \cos(\xi_*); \quad \varphi_2 = -\rho \sin(\xi_*);$$

$$\varphi_3 = \rho I_0 \int_{y_i^{(k)}}^y \frac{\varphi_4}{\rho} dy; \quad \varphi_4 = \eta;$$

$$\varphi_{4+j} = -\frac{\varphi_j}{\sin \xi}, \quad (j = 1, 2); \quad \varphi_7 = \varphi_4 R_1 - \frac{\varphi_3}{\sin \xi};$$

$$\varphi_8 = \psi \left( 1 + \int_{y_i^{(k)}}^y \psi^{-1} \mu_2 \frac{\varphi_5}{R_1} dy \right);$$

$$\varphi_{8+j} = \psi \int_{y_i^{(k)}}^y \psi^{-1} \mu_2 \frac{\varphi_{5+j}}{R_1} dy, \quad (j = 1, 2);$$

$$\varphi_{10+j} = \varphi_{7+j} \operatorname{ctg} \xi - \frac{\varphi_j}{\sin \xi}, \quad (j = 1, 3);$$

$$\psi = \frac{\sin \xi}{\sin(\xi_*)}; \quad \xi_* = \xi(y_i^{(k)});$$

$$\varphi_j = \varphi_j(\vec{\alpha}^{(i,k)}, y, y_i^{(k)}), \quad (j = 1, 13);$$

$$\vec{\alpha}^{(i,k)} = (\alpha_1^{(i,k)}, \alpha_2^{(i,k)}, \beta_1^{(i,k)}, \beta_2^{(i,k)})'.$$

Теперь из (4), (10) получим:

$$\dot{u} = (\varphi_{11} \dot{w}_* + \varphi_{12} \dot{u}_* + \varphi_{13} \dot{V}_*);$$

$$\dot{w} = (\varphi_8 \dot{w}_* + \varphi_9 \dot{u}_* + \varphi_{10} \dot{V}_*); \quad \dot{V} = \varphi_4 \dot{V}_*. \quad (11)$$

Согласно (9), (11) и в соответствии с [13] получим ограничения на геометрические параметры оболочки и коэффициенты гиперплоскостей (1):

$$\frac{(\alpha_1^{(i,k)} \times \beta_2^{(i,k)} - \alpha_2^{(i,k)} \beta_1^{(i,k)})}{(2R_1 \times \beta_2^{(i,k)} - \alpha_2^{(i,k)} H)} \times$$

$$\times \frac{R_1 H \sin^2 \xi}{R \cos \xi} = \beta_2^{(i,k)}; \quad (12)$$

$$\left| \alpha_1^{(i,k)} / \beta_1^{(i,k)} \right| \geq 2; \quad \left| \alpha_2^{(i,k)} / \beta_2^{(i,k)} \right| \geq 2.$$

Эти условия накладывают ограничения на множество задач, решение которых возможно методами типа [18].

Отметим, что такой подход для решения задач предельного анализа оболочек был предпринят Ф.Г. Ходжем [20]. Поскольку чис-

ленное решение удалось построить только в некоторой части оболочки, то в остальных областях строились упругие решения, а авторы работы [20] вынуждены были перейти к упругопластической задаче.

Таким образом, при численном решении задач предельного равновесия оболочек с использованием нелинейных аппроксимаций неизвестных функций итерационные процессы неустойчивы, что связано с нарушением требований теорем единственности. Применение аппроксимаций первого порядка для неизвестных функций или кусочно-линейных поверхностей текучести вычисление решений возможно при выполнении ограничений определяющих геометрические параметры и параметры аппроксимирующих гиперплоскостей. При этом решения задач предельного равновесия в ряде случаев удается построить в квадратурах, тогда как численные методы в общем случае оказываются неприемлемыми. Одним из возможных путей решения этой проблемы является разработка численных методов, учитывающие особенности задачи.

#### Метод решения

Таким образом, на каждом шаге интегрирования необходимо использовать особые конечные разности или аппроксимировать поверхность текучести специального вида гиперповерхностями. При этом для построения конечных разностей, а затем численной процедуры эти гиперповерхности должны быть достаточно простой структуры такой, чтобы решение уравнений (3)-(4), (7) можно было получить в явном виде.

В соответствии с ассоциированным законом течения [9] и гипотезами Кирхгофа-Лява [19], усилия  $t_j$ , ( $j = 1, 2$ ) зависят линейно от параметров  $n, q$  [13]. Эти параметры определяют значение координаты  $\zeta$  ( $\zeta \in [-1, 1]$ ) координата вдоль внешней нормали к срединной поверхности оболочки), где скорости деформаций  $\dot{\varepsilon}_j(\zeta) = \dot{\varepsilon}_{0j} + 2\zeta \dot{\chi}_j$  меняют знак (6).

Моменты  $m_j$ , ( $j = 1, 2$ ) и параметры  $n, q$  связаны, по крайней мере, квадратичной зависимостью [13]. Исключая эти параметры из соответствующих выражений в общем случае получим нелинейные соотношения для гиперповерхностей. Такого типа гиперповерхности имеют место при реализации пластических режимов [13], соответствующих сторонам кусочно-линейного условия пластично-

сти. Эти соотношения можно записать следующим образом [12]:

$$\begin{aligned} \eta_1^{(p)} t_2 - \eta_2^{(p)} t_1 &= \alpha_1^{(p)} \pm \theta \alpha_2^{(p)}; \\ \eta_1^{(p)} m_2 - \eta_2^{(p)} m_1 &= \mp \alpha_2^{(p)} (1 - \theta^2), \\ (p = \overline{1, 2l}), \theta &= \begin{cases} n & \text{если } p = 1, 2; \\ q & \text{если } p = \overline{3, 2l}. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $2l$  – число сторон многоугольника пластичности.

Соотношения второй группы (пластические режимы, соответствующие вершинам условия пластичности) записываются в параметрическом виде [13]:

$$\begin{aligned} t_j &= \alpha_{j,p}^{(0)} \pm \left( \alpha_{j,p}^{(1)} n + \sum_{i=2}^{l-1} \alpha_{j,p}^{(i)} \vartheta_i + \alpha_{j,p}^{(l)} q \right); \\ m_j &= \beta_{j,p}^{(0)} \pm \left( \beta_{j,p}^{(1)} n^2 + \sum_{i=2}^{l-1} \beta_{j,p}^{(i)} \vartheta_i^2 + \beta_{j,p}^{(l)} q^2 \right), \\ (j = \overline{1, 2}; p = \overline{2l+1, 6l}). \end{aligned} \quad (14)$$

При реализации пластических режимов (13) решение системы уравнений (3)–(4), (7), (13) удастся получить в явном виде [12]:

$$\bar{\mathbf{U}}(y) = \mathbf{A}^{(i)} \bar{\mathbf{U}}(y_i^{(k)}) + \bar{\mathbf{B}}^{(i)}. \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{U}} = (t, Q, m, \dot{u}, \dot{w}, \dot{V})';$$

Здесь  $\mathbf{A}^{(i)}(y, y_i^{(k)}) = \left\| \mathbf{a}_n^{(i)} \right\|_{(r, l = \overline{1, 6})}$ ;

$$\bar{\mathbf{B}}^{(i)}(y, y_i^{(k)}, X, Z) = (b_1^{(i)}, \dots, b_6^{(i)})'.$$

При реализации пластических режимов, соответствующих вершинам условия пластичности решение в явном виде получить не удастся. Поэтому на каждом шаге интегрирования  $y \in [y_i^{(k)}, y_{i+1}^{(k)}]$  поверхность текучести

$F(\bar{\mathbf{T}}, y) = 0$  будем аппроксимировать гиперповерхностями (13):

$$\begin{aligned} \hat{f}_j^{(k)}(\bar{\mathbf{T}}, y) &= \alpha_2^{(k,j)} \left\{ \alpha_2^{(k,j)} \pm \left( \eta_1^{(k,j)} m_2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \eta_2^{(k,j)} m_1 \right) \right\} - \left( \eta_1^{(k,j)} t_2 - \eta_2^{(k,j)} t_1 - \alpha_1^{(k,j)} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть  $F_N^{\in(k)}(\bar{\mathbf{T}}, y) = 0$  вписанная по отношению к точной поверхности текучести  $F(\bar{\mathbf{T}}, y) = 0$  поверхность, образованная гиперповерхностями (16), а  $(\bar{\mathbf{T}}'(y), \bar{\mathbf{e}}'(y))'$  решение соответствующей задачи. Тогда в области пластического течения обобщенные напряжения  $\bar{\mathbf{T}}(y)$  соответствуют некоторой кривой

$\Gamma_N^{(k)}(\bar{\mathbf{T}}, y) = 0$ , расположенной на поверхности  $F_N^{\in(k)}(\bar{\mathbf{T}}, y) = 0$ .

Поскольку кривизна гиперповерхностей (14) превосходит кривизну гиперповерхностей (16) [13], то кривая  $\Gamma_N^{(k)}(\bar{\mathbf{T}}, y) = 0$  не выходит за пределы области, ограниченной поверхностью  $F(\bar{\mathbf{T}}, y) = 0$ , а соответствующее значение предельной нагрузки не превосходит истинное значение [9].

Для обеспечения максимального приближения кривой  $\Gamma_N^{(k)}(\bar{\mathbf{T}}, y) = 0$  к поверхности текучести  $F(\bar{\mathbf{T}}, y) = 0$ , коэффициенты  $\alpha_i^{(k,j)}$ ,  $\eta_i^{(k,j)}$  будем выбирать так, чтобы в узлах  $y = y_i^{(k)}$  эта кривая касалась точной поверхности текучести. Кроме этого, аналогично (2) потребуем, чтобы в пределах каждого шага интегрирования искомые коэффициенты должны обеспечивать минимальное отклонение кривой  $\Gamma_N^{(k)}(\bar{\mathbf{T}}, y) = 0$  (или гиперповерхности  $F_N^{\in(k)}(\bar{\mathbf{T}}, y) = 0$ ) и поверхности  $F(\bar{\mathbf{T}}, y) = 0$ . Тогда для определения величин  $\alpha_i^{(k,j)}$ ,  $\eta_i^{(k,j)}$  имеют место соотношения (2), где  $f_j^{(k)}(\bar{\mathbf{T}}, y) \geq 0$  нужно заменить выражением  $F_j^{\in(k)}(\bar{\mathbf{T}}, y) \geq 0$ .

После вычисления констант гиперповерхности  $F_N^{\in(k)}(\bar{\mathbf{T}}, y) = 0$  значения искомых величин в узлах сетки определяются при помощи выражений (15). При этом отметим, что аппроксимирующие гиперповерхности не противоречат теории тонких оболочек, а при уменьшении шага интегрирования приближенная поверхность текучести сколь угодно близко приближается к точной поверхности  $F(\bar{\mathbf{T}}, y) = 0$ .

Численный метод решения задачи с заданной точностью можно построить аналогично [16–18], где нужно изменить правила вычисления значений искомых функций в узлах сетки.

Особо следует отметить, что поскольку поверхность текучести строится в ходе численной процедуры, при таком подходе не требуется определять последовательность реализации пластических режимов.

### Выводы

Численное решение задач предельного равновесия оболочек с использованием нелинейных аппроксимаций неизвестных функций сопровождается неустойчивыми итерационными процессами, что связано с нарушением требований теорем единственности. Применение конечно разностных методов ограничено предположениями тонких оболочек.

При построении численных методов решения такого типа задач в пределах каждого шага искомые функции необходимо вычислять специальным способом, учитывающим особенности задачи и предположения. В работе, применительно к задачам предельного анализа оболочек, сформулирован согласованный с положениями теории тонких оболочек способ аппроксимации искомых функций.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Савчук А. О пластическом анализе оболочек // *Механика деформируемых твердых тел. Направления развития*. Под ред. Г.С. Шапиро: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. – С. 276–309.
2. Ржаницын А.Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек. М.: Наука. – 1983. – 288 с.
3. Чирас А.А. Теория оптимизации в предельном анализе твердого деформируемого тела. Вильнус: Минтис. – 1971. – 124 с.
4. Ходж Ф.Г. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций: Пер. с англ. М.: Машгиз. – 1963. – 380 с.
5. Save M.A., Massonnet C. Plastic analysis and design of plates, shells and disk. Amsterdam–London: North–Holland Publ. Co., 1972. – 478 p.
6. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Несущая способность гладких и подкрепленных цилиндрических оболочек // *Прикладная механика*. 1967. Т.3, № 1. – С. 18–23.
7. Cinquini C., Lamblin D.O., Guerlement G. Limit analysis of circular cylindrical shells under hydrostatic pressure // *J. Struct. Mech.* 1984. Vol. 12, №3. – P.263–278.
8. Онат Е.Т. Предельное равновесие пологих конических оболочек / *Сборник переводов: Механика*. М.: ИЛ., 1961.-№ 4.-С. 105–115.
9. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука. – 1966. – 231 с.
10. Лепик Ю.Р. Применение принципа максимума Понтрягина в задачах прочности, устойчивости и колебаний тонкостенных конструкций / *Сборник переводов: Механика*. М.: ИЛ, 1974. – № 6. С.126–141.
11. Немировский Ю.В., Налимов А.В. Предельное равновесие армированных оболочек нулевой гауссовой кривизны // *Прикладная механика*. 1989. Т. 25, № 9. – С. 72–79.
12. Немировский Ю.В., Налимов А.В. Полные решения задач предельного равновесия армированных осесимметрических оболочек // *Известия ВУЗов. Строительство и архитектура*. – 2004. – № 1. С. 4–13.
13. Немировский Ю.В. Предельное равновесие многослойных армированных осесимметрических оболочек // *Известия АН СССР. МТТ*. 1969. № 6. – С.80–89.
14. Немировский Ю.В., Налимов А.В. Неединственность решений задач статики жесткопластического тела / *Труды XVII Межреспубликанской конференции: Численные методы решения задач теории упругости и пластичности*. Новосибирск: Нонпарель, 2003. – С.115–121.
15. Немировский Ю.В., Налимов А.В. Алгоритм численного решения многоточечных краевых задач предельного равновесия // *Вестник СамГУ*. 2004. Т.34. № 4. – С.47–59.
16. Gladwell Ian The development of the boundary-value codes in the ordinary differential equations chapter of the NAG library / *Lecture Notes Comput. Sci.* Springer–Verlag. 1979. Vol. 76. – P. 122–143.
17. Ascher U., Christiansen J., Russell R.D. Colsys: A collocation code for boundary value problems. Codes for boundary-value problems in ordinary differential equations / *Lecture Notes Comp. Sci.* Springer–Verlag. 1979. № 76. – P.164–185.
18. Lentini M., Pereyra V. A variable order finite difference method for nonlinear multipoint boundary value problems // *Math. Comput.* 1974. Vol.28, № 128. – P.981–1003.
19. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука.-1974.-448 с.
20. Hodge P.G. Automatic piecewise linearization in ideal plasticity // *Comp. Meth. In Appl. Eng.* 1977. Vol. 10, № 3. – P.249–272.