

РАСЧЕТ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ИСПОЛЬЗУЯ МЕТОД РИТЦА-ТИМОШЕНКО И РАСЧЕТНЫЙ КОМПЛЕКС SCAD OFFICE

И. К. Калько, Ю. А. Переберина

Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова, г. Барнаул

В статье приведены формулы, с помощью которых производится расчет прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по контуру, эпюры усилий. Приведен пример расчета пластинки. Решение данной задачи выполнено так же с помощью комплексной программы SCAD Office.

Ключевые слова: расчет тонкой пластинки, SCAD, эпюры усилий.

Для решения многих задач теории упругости используются вариационные методы, позволяющие эффективно получать приближенные решения дифференциальных уравнений с точностью, достаточной для инженерных расчетов.

Сущность вариационных методов заключается в том, что функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению при заданных граничных условиях, заменяют приближенным аналитическим выражением, которое достаточно хорошо аппроксимировало данную функцию. Из вариационных методов широко используются методы Ритца-Тимошенко и Бубнова-Галеркина. Метод Ритца-Тимошенко основан на использовании принципа возможных перемещений, и его целесообразно применять для сложных уравнений и сложных граничных условий.

Рассмотрим изгиб прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по контуру. На данную пластинку действует равномерно-распределенная нагрузка q (рисунок 1).

Данные: $a = 3$ м; $b = 3$ м; $h = 0,12$ м; $q = 5,2$ кПа (2 кПа – по СП 20.13330.2011 таблица 8.3 + 3,2 кПа – собственный вес пластинки); $E = 2,447 \cdot 10^7$ кПа – модуль упругости железобетона; $\nu = 0,2$ – коэффициент Пуассона для железобетона.

Решение:

Для определения максимального прогиба железобетонной пластинки используем формулу, приведенную в методе Ритца-Тимошенко

$$W = \frac{16 \cdot q \cdot a^4}{\pi^6 \cdot D} \cdot \sum_k \sum_i \frac{\sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot y}{b}\right)}{k \cdot i \cdot \left(k^2 + \frac{a^2 \cdot i^2}{b^2}\right)^2}, \quad (1)$$

где D – цилиндрическая жесткость; $k = 1, 3, \dots, n$; $i = 1, 3, \dots, n$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} = \frac{2,447 \cdot 10^7 \cdot 0,12^3}{12 \cdot (1 - 0,2^2)} = 3669,78 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластинки при

$$x = a/2; \quad y = b/2.$$

Для более точного решения подставляем 4 члена ряда

$$k = 1; \quad k = 3; \quad i = 1; \quad i = 3.$$

$$W_{\max} = \frac{16 \cdot q \cdot a^4}{\pi^6 \cdot D} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot b}{2}\right)}{k \cdot i \cdot \left(k^2 + \frac{a^2 \cdot i^2}{b^2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot b}{2}\right)}{k \cdot i \cdot \left(k^2 + \frac{a^2 \cdot i^2}{b^2}\right)^2} + \frac{\sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot b}{2}\right)}{k \cdot i \cdot \left(k^2 + \frac{a^2 \cdot i^2}{b^2}\right)^2} + \frac{\sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot b}{2}\right)}{k \cdot i \cdot \left(k^2 + \frac{a^2 \cdot i^2}{b^2}\right)^2} \right) = 0,465 \text{ мм}. \quad (2)$$

Для нахождения максимальных моментов M_x и M_y используем формулы

$$M_y = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right),$$

$$M_x = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

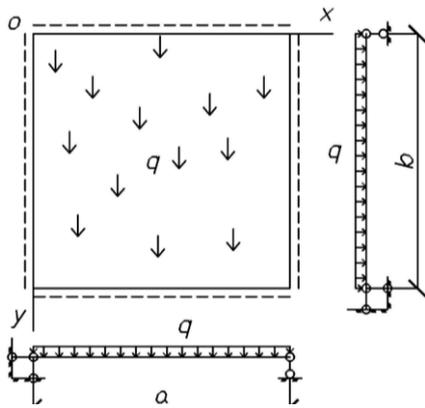


Рисунок 1 – Схема плиты, шарнирно-опертой по контуру

Максимальный момент возникает в центре пластинки при

$$x = a/2; \quad y = b/2.$$

Подставляя функцию прогиба в формулы для нахождения максимального момента получаем

$$M_x = \frac{16 * q * a^2}{\pi^4} * \frac{1 + \nu * \frac{a^2}{b^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2} * \sin\left(\frac{\pi * a/2}{a}\right) * \sin\left(\frac{\pi * b/2}{b}\right) = 2,306 \frac{кН * м}{м}.$$

$$M_y = \frac{16 * q * a^2}{\pi^4} * \frac{\frac{a^2}{b^2} + \nu}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2} * \sin\left(\frac{\pi * a/2}{a}\right) * \sin\left(\frac{\pi * b/2}{b}\right) = 2,306 \frac{кН * м}{м}.$$

Пластика была так же рассчитана методом конечных элементов при использовании расчетного комплекса – SCAD Office. В результате расчета получены:

1. $W = 0,47$ мм. Отличие от приближенного решения составило 1%;
2. $M_x = 2,29$ кН*м/м. Отличие от приближенного решения составило 0,7%;
3. $M_y = 2,29$ кН*м/м. Отличие от приближенного решения составило 0,7%.

На рисунках 2-6 приведены цветковые отображения эпюр усилий и прогиба при расчете пластинки с помощью комплекса – SCAD Office.

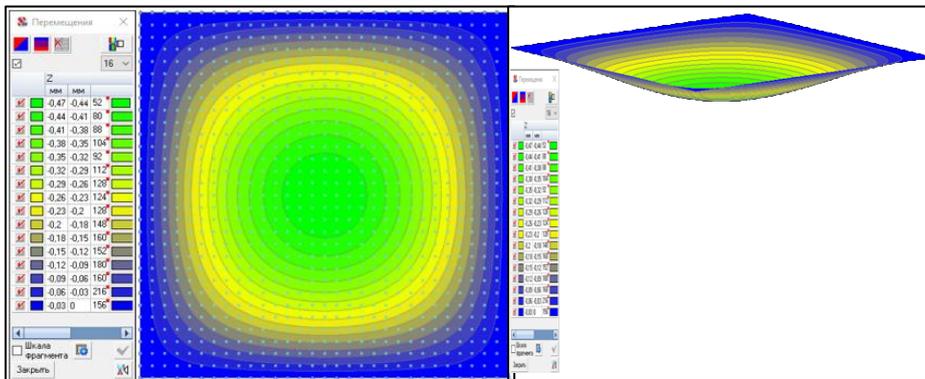


Рисунок 2 – Эпюра прогибов в плане и по середине пластинки

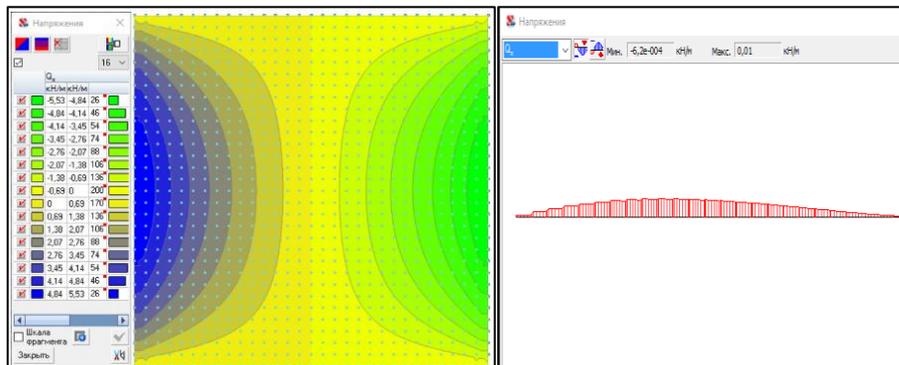


Рисунок 3 – Эпюра поперечной силы Q_x в плане и по середине пластинки

РАСЧЕТ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ИСПОЛЬЗУЯ МЕТОД РИТЦА-ТИМОШЕНКО И РАСЧЕТНЫЙ КОМПЛЕКС SCAD OFFICE

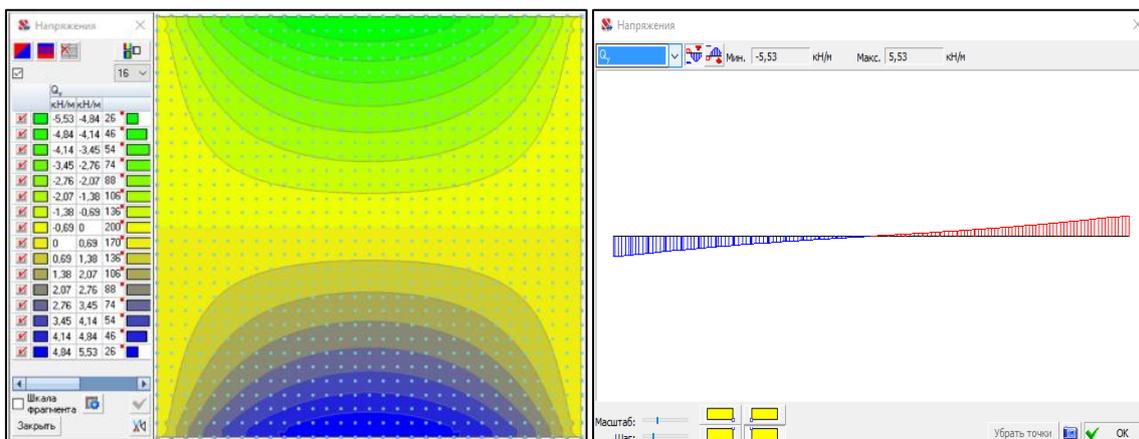


Рисунок 4 – Эпюра поперечной силы Q_y в плане и по середине пластинки

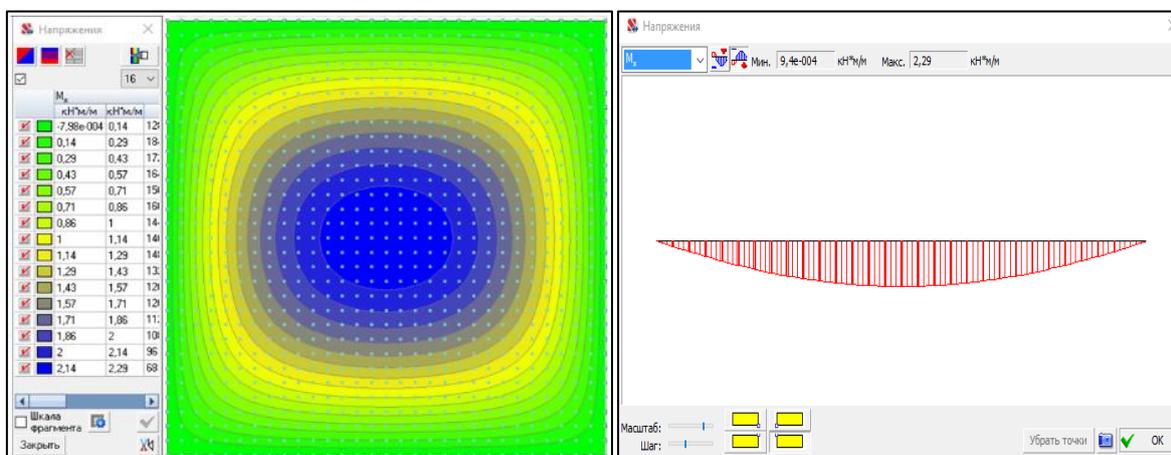


Рисунок 5 – Эпюра изгибающего момента M_x в плане и по середине пластинки

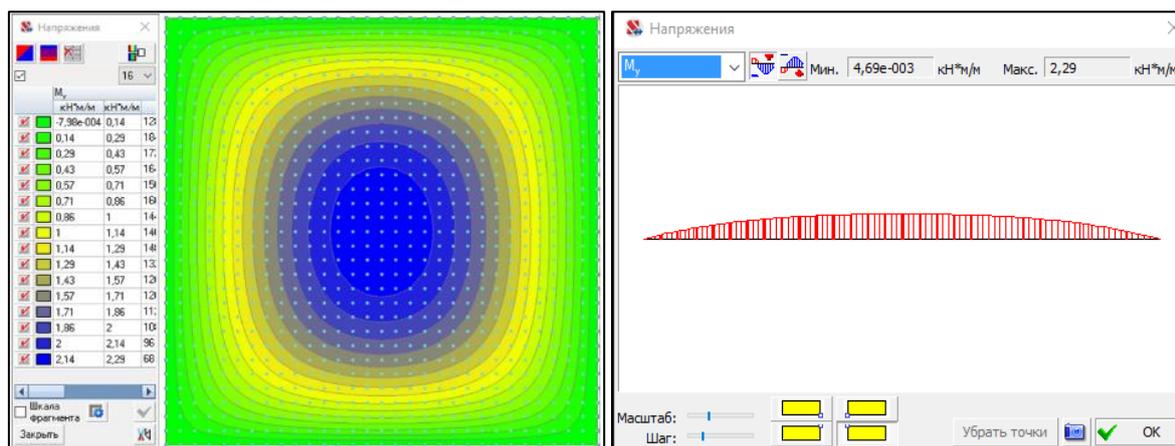


Рисунок 6 – Эпюра изгибающего момента M_y в плане и по середине пластинки

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD: учебное пособие / Э. З. Криксунов, А. А. Маляренко, В. С. Карпиловский. – М. : Изд-во АСВ, 2008. – 590 с.

ПОЛЗУНОВСКИЙ АЛЬМАНАХ № 4 Т. 2 2017

2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017612481 «Расчет тонких плит с различными условиями опирания при действии произвольной нагрузки». – Калько И. К.; Бабаева А. С.