

РАСЧЕТ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ МЕТОДОМ БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА И РАСЧЕТНЫМ КОМПЛЕКСОМ SCAD OFFICE

И. К. Калько, А. С. Бабаева

Алтайский государственный технический университет
им. И. И. Ползунова, г. Барнаул

В статье приведены формулы, с помощью которых производится расчет прямоугольной пластинки, жестко заделанной по контуру, эпюры усилий. Приведен пример расчета пластинки. Решение данной задачи выполнено так же с помощью комплексной программы SCAD Office.

Ключевые слова: расчет тонкой пластинки, SCAD, эпюры усилий.

Метод Бубнова-Галеркина основан на свойстве ортогональных функций. Метод Бубнова-Галеркина, как и метод Ритца-Тимошенко, исходит из принципа возможных перемещений, поэтому оба метода равноправны. В случае, когда удастся удовлетворить всем граничным условиям, результаты расчета по методам Ритца-Тимошенко и Бубнова-Галеркина должны совпадать.

Рассмотрим изгиб прямоугольной пластинки, жестко заделанной по контуру. На данную пластинку действует равномерно-распределенная нагрузка q (рисунок 1). Расчеты выполнены в программе MathCAD Prime 3.1.

Из характера закрепления пластины вытекают следующие граничные условия:

- на гранях пластины OB и AC: при $x = a$; $x = 0$ – угол поворота и прогиб равны 0;
- на гранях пластины OA и BC: при $y = b$; $y = 0$ – угол поворота и прогиб равны 0

$$W_n = \frac{d}{dx} W = 0, \quad W_n = \frac{d}{dy} W = 0, \quad (a)$$

Чтобы удовлетворить указанные условия (a), приближенное выражение функции прогибов можно принять в виде следующего ряда

$$W_n = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} \cdot \frac{(1 - \cos(2 \cdot \frac{k\pi x}{a})) \cdot (1 - \cos(\frac{2i\pi y}{b}))}{\varphi_{ki}}, \quad (1)$$

$$\varphi_{ki} = (1 - \cos(2 \cdot \frac{k\pi x}{a})) \cdot (1 - \cos(\frac{2i\pi y}{b})). \quad (2)$$

При $x = a$ и $x = 0$ – угол поворота и прогиб равны 0. На гранях пластины OA и BC при

$y = b$ и $y = 0$ – угол поворота и прогиб равны 0 (см. выражения (a)).

Функция каждого члена ряда удовлетворяет всем граничным условиям, т.к. на грани OB

$$\cos\left(2 \cdot \frac{k\pi x}{a}\right) \text{ при } x = 0 \quad W_n = 0.$$

На грани AC

$$\cos\left(2 \cdot \frac{k\pi x}{a}\right) \text{ при } x = a \quad W_n = 0.$$

Аналогично выполняются условия на гранях OA и BC.

Для проверки граничных условий в отношении углов поворота на контуре пластины вычисляем производные функции прогибов

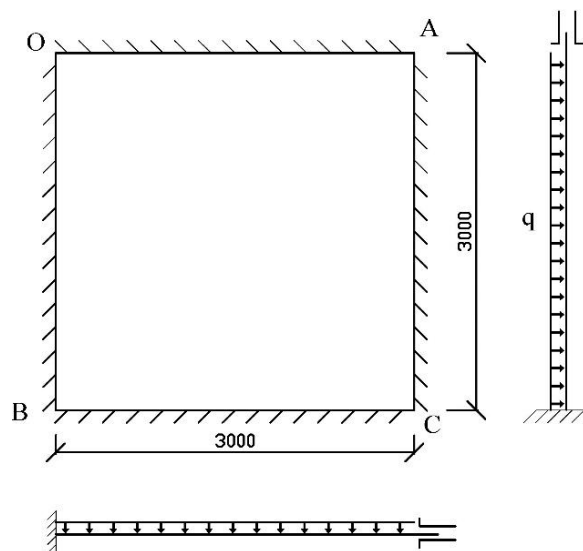


Рисунок 1 – Расчетная схема пластины

$$\frac{d}{dx} W_n = \frac{2\pi}{a} \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} \cdot k \cdot \frac{2\pi x}{a} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2i\pi y}{b}\right)\right), \quad (3)$$

$$\frac{d}{dy} W_n = \frac{2\pi}{b} \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot y}{a} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2 \cdot i \cdot \pi \cdot y}{b}\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot i \cdot \pi \cdot y}{b}\right). \quad (4)$$

На грани ОВ

$$\sin\left(\frac{2k \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \text{ при } x = 0 \quad \sin(0) = 0.$$

На грани АС

$$\sin\left(\frac{2k \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \text{ при } x = a \quad \sin(2k\pi) = 0.$$

Аналогично на гранях ОА и ВС обращаются в 0 произведения

$$\frac{d}{dx} W_n = 0, \quad \frac{d}{dy} W_n = 0.$$

Таким образом, функция прогибов W удовлетворяется граничным условиям.

Для нахождения неопределенных параметров a_{ki} составим систему уравнений Бубнова-Галеркина. В первом приближении ограничимся одним членом ряда

$$W_1 = a_{11} \cdot \left(1 - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \left(1 - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot y}{b}\right).$$

Выражение φ_{ki} для следующего члена ряда будет

$$\varphi_{ki} = a_{11} \cdot \left(1 - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \left(1 - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot y}{b}\right).$$

Подставив W_1 и φ_{ki} в уравнение Бубнова-Галеркина и выполнив преобразования, получим

$$16\pi^4 \cdot a_{11} \cdot D \cdot \left(\frac{3b}{4a^2} + \frac{1}{2ab} + \frac{3a}{4b^2}\right) - qab = 0.$$

Из полученного выражения найдем

$$a_{11} = \frac{q \cdot a^4}{4\pi^4 \cdot D} \cdot \frac{1}{3 + 2 \cdot \frac{a^2}{b^2} + 3 \cdot \frac{a^4}{b^4}}.$$

В дальнейшем расчет будем выполнять в программном комплексе MathCAD Prime 3.1.

В качестве примера рассмотрим изгиб прямоугольной пластинки, жестко заделанной по контуру при следующих данных: на пластинку действует равномерно-распределенная нагрузка q (рисунок 1); $a=b=3$ м; $q=30$ МПа; $E=2,06 \cdot 10^5$ МПа; $h=0,12$ м; $\nu=0,3$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} = 32,5978021978.$$

Определяем α_{11}

$$a_{11} = \frac{q \cdot a^4}{4\pi^4 \cdot D} \cdot \frac{1}{3 + 2 \cdot \frac{a^2}{b^2} + 3 \cdot \frac{a^4}{b^4}} = 0,0239148953.$$

Зная α_{11} , найдем функцию прогибов в первом приближении

$$W_1(x, y) = \frac{q \cdot a^4}{4\pi^4 \cdot D} \cdot \frac{\left(1 - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \left(1 - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot y}{b}\right)}{3 + 2 \cdot \frac{a^2}{b^2} + 3 \cdot \frac{a^4}{b^4}}.$$

Найдем прогиб в центре пластины

$$W_1\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 0,0956595813$$

или максимальный прогиб равен

$$\max W_1 = \frac{q \cdot a^4}{8\pi^4 \cdot E \cdot h^3} \cdot 12 \cdot (1 - \nu^2) = 0,0956595813.$$

Точное значение максимального прогиба квадратной пластины, защемленной по контуру и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки q

$$\max W = 0,0138 \cdot \frac{q \cdot a^4}{E \cdot h^3} = 0,0942050971.$$

Процент погрешности составляет

$$\frac{0,0000956596 - 0,0000942051}{0,0000942051} \cdot 100 = 1,5439716109.$$

Таким образом, максимальный прогиб, полученный в первом приближении отличается от точного на 1,54%.

Определяем величины усилий: M_x ; M_y ; H ; Q_x ; Q_y .

1. Изгибающий момент M_x

$$M_x(x, y) = -D \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} W_1(x, y) + \nu \cdot \frac{d^2}{dy^2} W_1(x, y) \right)$$

или величина момента в сечении с координатами $x = a/2$; $y = b/2$ равна

$$M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 8,8909338646.$$

2. Изгибающий момент M_y

$$M_y(x, y) = -D \cdot \left(\frac{d^2}{dy^2} W_1(x, y) + \nu \cdot \frac{d^2}{dx^2} W_1(x, y) \right)$$

или величина момента в сечении с координатами $x = a/2$; $y = b/2$ равна

$$M_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 8,8909338646.$$

3. Крутящий момент H

$$H(x, y) = -D \cdot (1 - \nu) \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} W_1(x, y) + \frac{d^2}{dy^2} W_1(x, y) \right)$$

или величина момента в сечении с координатами $x = a/2$; $y = b/2$ равна

$$H\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \rightarrow -(3,66038828843999232336 \cdot 10^{-41}).$$

4. Поперечная сила Q_x

$$Q_x(x, y) = -D \cdot \left(\frac{d^3}{dx^3} W_1(x, y) + \left(\frac{d}{dx} W_1(x, y) \right) \cdot \left(\frac{d^2}{dy^2} W_1(x, y) \right) \right)$$

или величина поперечной силы в сечении с координатами $x = a/2$; $y = b/2$ равна

$$Q_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \rightarrow 1,897652502649971787447 \cdot 10^{-19}.$$

5. Поперечная сила Q_y

$$Q_y(x, y) = -D \cdot \left(\frac{d^3}{dy^3} W_1(x, y) + \left(\frac{d}{dy} W_1(x, y) \right) \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} W_1(x, y) \right) \right)$$

или величина поперечной силы в сечении с координатами $x = a/2$; $y = b/2$ равна

$$Q_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \rightarrow 1,897652502649971787447 \cdot 10^{-19}.$$

Используя систему уравнений Бубнова-Галеркина можно, получить объемный вид прогиба пластины (рисунок 2). На рисунке 3 показан график изменения прогиба с координатами прямой: $x = a/2$; $y = b/2$.

Расчет пластин можно выполнить с помощью вычислительного комплекса SCAD Office или использовать разработанную на кафедре САДиА программу Plactina.

Рассчитаем пластину с использованием вычислительного комплекса SCAD Office. Результаты расчета в программном комплексе SCAD Office (рисунки 4-9):

Величины перемещений: единицы измерения: мм; град.

Параметры выборки: список /элементы: **все**.

Список загрузок/комбинаций: **все**.

Список факторов: Z (таблица 1).

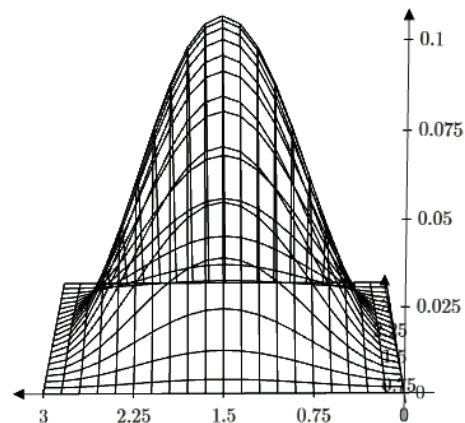


Рисунок 2 – Объемный вид прогиба пластины

РАСЧЕТ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ МЕТОДОМ БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА И РАСЧЕТНЫМ КОМПЛЕКСОМ SCAD OFFICE

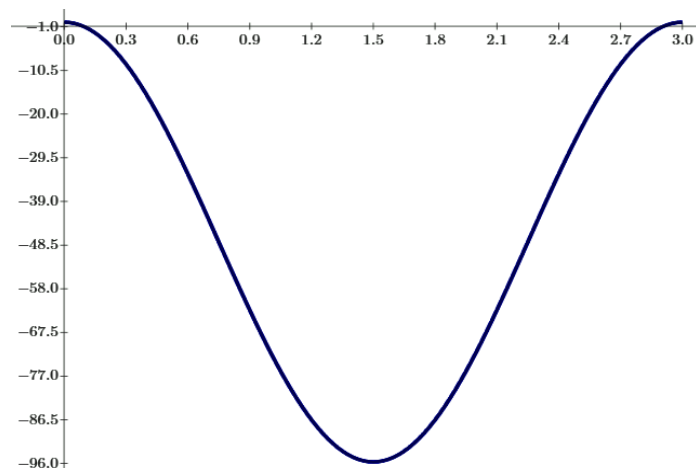


Рисунок 3 – График изменения прогиба по центру пластины

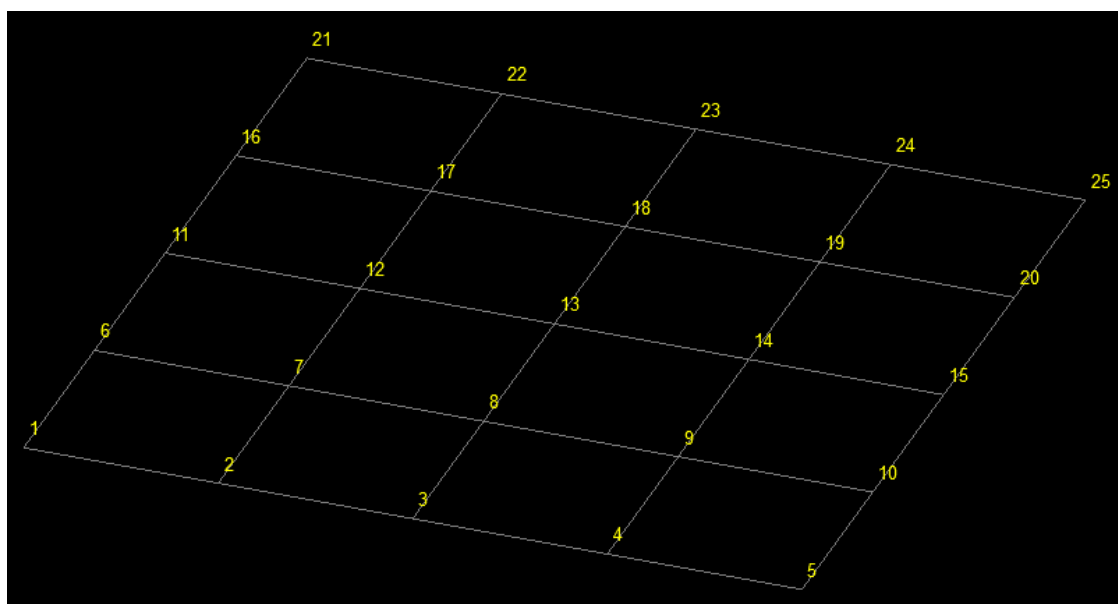


Рисунок 4 – Схема пластины и ее узлы

Таблица 1 – Список факторов Z

Узел	Значение Z
7	-37.055
8	-61.941
9	-37.055
12	-61.941
13 (центр пластины)	-103.891
14	-61.941
17	-37.055
18	-61.941
19	-37.055

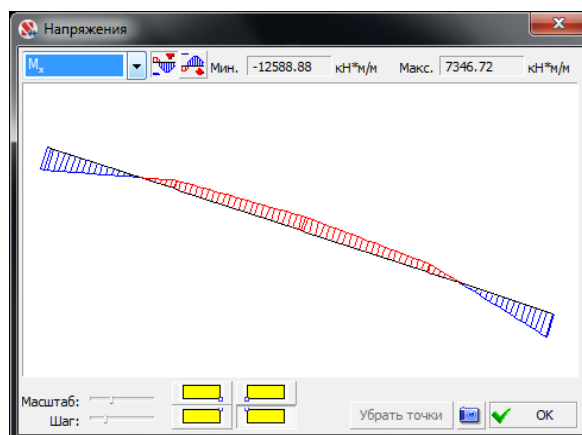
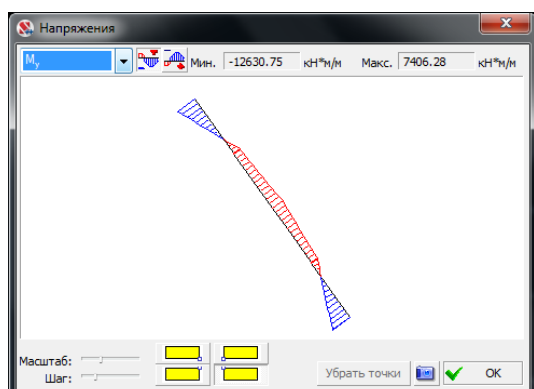
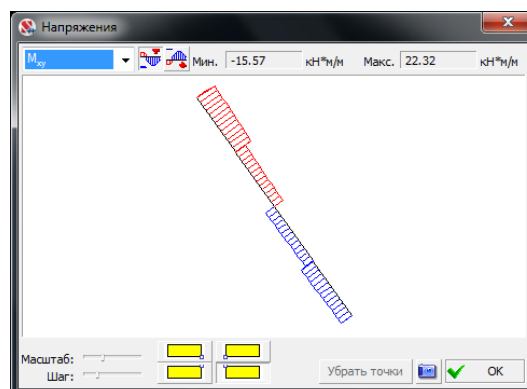
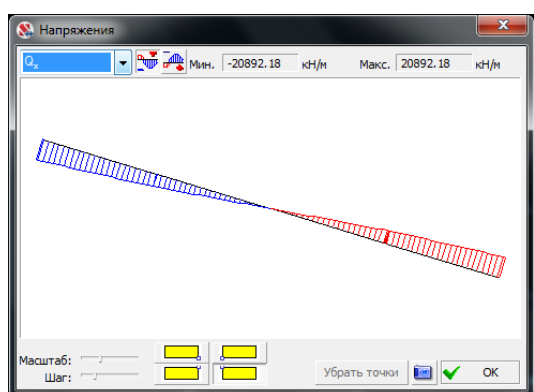
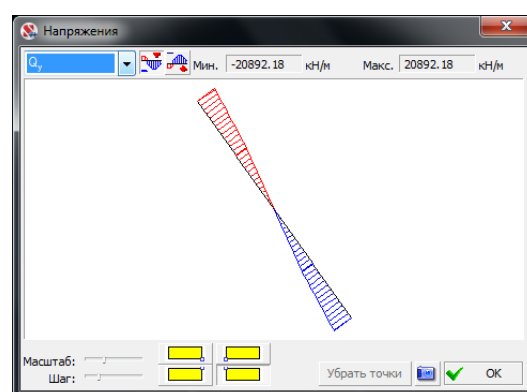


Рисунок 5 – Эпюра внутренних усилий M_x

Рисунок 6 – Эпюра внутренних усилий M_x Рисунок 7 – Эпюра внутренних усилий M_y Рисунок 8 – Эпюра внутренних усилий Q_x Рисунок 9 – Эпюра внутренних усилий Q_y

Сравнение результатов расчета пластины разными методами приведено в таблице 2.

Таблица 2

Усилие	Метод Бубнова-Галеркина	Scad	Расхождение в %
Q_x , МН/м	$1,8 \cdot 10^{-19}$	0	0
Q_y , МН/м	$1,8 \cdot 10^{-19}$	0	0
M_x , МН*м	8,89	7,4	20,1
M_y , МН*м	8,89	7,4	20,1
M_{xy} , МН*м	$3,6 \cdot 10^{-41}$	0	0
Прогиб в центре, мм	95,6	103,9	8,7

Вывод: Значительные расхождения наблюдаются только в значениях изгибающих моментов, вероятно это связано с очень большой приложенной нагрузкой (30000 кН/м^2).

В целом, метод Бубнова-Галёркина можно использовать для расчета пластин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD: учебное пособие / Э. З. Криксунов, А. А.

Маляренко, В. С. Карпиловский. – М. : Изд-во АСВ, 2008. – 590 с.

2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017612481 «Расчет тонких плит с различными условиями опирания при действии произвольной нагрузки». – Калько И. К.; Бабаева А. С.

3. Жемочкин, Б. Н. Теория упругости / Б. Н. Жемочкин. – М. : Госстройиздат, 1957. – 256 с.

4. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высшая школа, 1990. – 400 с.

5. Калько, И. К. Расчет статически неопределимых систем в обычной и матричной форме с использованием системы MathCAD: учебное пособие / И. К. Калько, Ю. И. Колмогоров. – Алт. гос. техн. ун-т им. И. И. Ползунова. – Барнаул : Изд-во АлтГТУ, 2011. – 204 с.

6. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности / В. И. Самуль. – М. : Высшая школа, 1982. – 264 с.

Калько И.К. – к.т.н., доцент кафедры «Строительство автомобильных дорог и аэродромов» ФГБОУ ВО АлтГТУ им. И.И. Ползунова, E-mail: stroygips@list.

Бабаева А.С. – магистрант ФГБОУ ВО АлтГТУ им. И.И. Ползунова.