

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ АРОК

И. К. Калько

Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова, г. Барнаул

В статье получены формулы, с помощью которых не требуется вычисление интегралов при расчете арок, что значительно упрощает их решение. В качестве примера рассмотрен расчет параболических арок с использованием среды программирования DELPHI.

Ключевые слова: расчет, параболическая арка, распор, изгибающий момент, перерезывающая сила, продольная сила, среда DELPHI.

Расчет двухшарнирной арки, как и других систем с криволинейными элементами, при заданном очертании оси производится по методу сил.

За лишнее неизвестное принимаем распор X_1 – горизонтальную реакцию опоры В (рисунок 1).

Каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (1)$$

где Δ_{1P} – горизонтальное перемещение правой опоры, вызванное внешней нагрузкой; δ_{11} – горизонтальное перемещение этой же опоры от действия единичной силы $\bar{X}_1 = 1$.

Из уравнения (1) получаем

$$X_1 = -\Delta_{1P} / \delta_{11}. \quad (2)$$

В арках влияние других внутренних усилий (Q и N), а первую очередь нормальных сил, на величины единичных и грузовых перемещений может быть существенно больше. Это зависит от степени пологости арок. Если отношение стрелы подъема арки к величине ее пролета велико, то в формуле Мора можно перемещения вычислять только учетом изгибающих моментов.

Перемещения, входящие в равенство (2), определяем по формуле Мора, в которой влиянием сдвигов, т.е. Q , пренебрегаем

$$\delta_{11} = \int_l \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} dx + \int_l \frac{\bar{N}_1^2}{EF} dx, \quad (3)$$

$$\Delta_{1P} = \int_l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx + \int_l \frac{\bar{N}_1 N_P}{EF} dx. \quad (4)$$

В пологих арках продольная сила в произвольном сечении основной системы, при действии вертикальной нагрузки, величина $\sin \varphi$ незначительна, поэтому можно пренебречь влиянием $N_P = Q_P \sin \varphi$ и вычислить Δ_{1P} по упрощенной формуле

$$\Delta_{1P} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_1 M_P dx}{EJ}. \quad (5)$$

Момент и продольная сила от единичного неизвестного $\bar{X}_1 = 1$ будут

$$\bar{M}_1 = -y; \quad N_1 = -\cos \varphi. \quad (6)$$

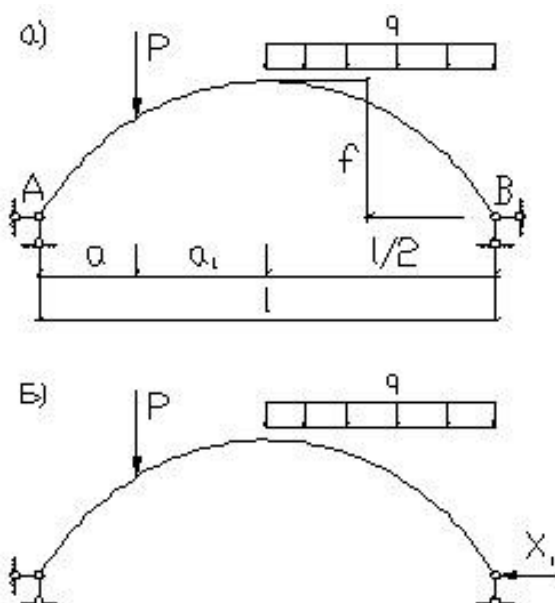


Рисунок 1 – а) Расчетная схема; б) основная система

Для арок с большим пролетом, имеющих массивные сечения, влиянием обжатия (деформациями от действия продольной силы) можно пренебречь, т.е. отбросить второе слагаемое в формуле (3).

Подставляя в (2) формулы (3), (5), (6) получим приближенную формулу для определения распора в двухшарнирной арке

$$X_1 = H = \frac{\sum_0^l \int \frac{y M_P}{EJ} dx}{\int_0^l \frac{y^2}{EJ} dx}. \quad (7)$$

В формуле (7) при определении Δ_{1P} и δ_{11} приходится решать интегралы, которые могут быть сложными. Правило Верещагина использовать нельзя, т.к. арка представляет собой криволинейный элемент.

1. Рассмотрим параболическую арку постоянного поперечного сечения. На арку действует сосредоточенная сила P (рисунок 2).

Рассматриваем две системы координат x - x и y - t (рисунок 3).

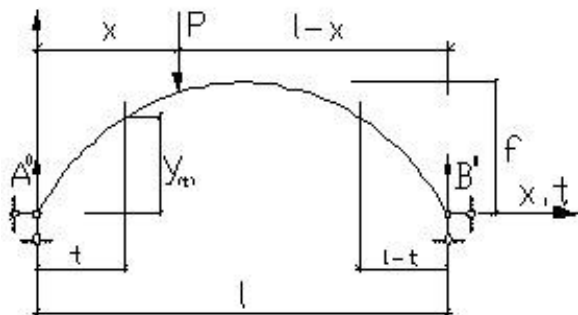


Рисунок 2 – Расчетная схема арки при действии на арку сосредоточенной силы P

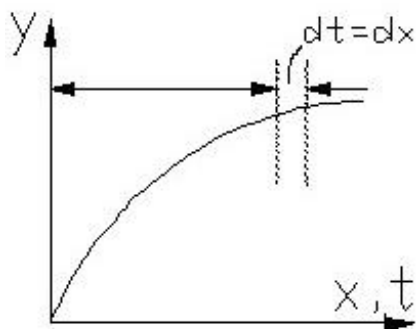


Рисунок 3 – Схема части арки с указанием двух систем координат

Горизонтальная ось X определяет положение силы P , ось t – положение рассматриваемого сечения арки, которое определяется абсциссой t .

Уравнение оси арки, описываемое квадратной параболой

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x). \quad (8)$$

Вычисляем интегралы формулы (7):

а) Числитель

$$\int_0^l y M_P dx = \int_0^x y_{(t)} M_{1P}(t) dt + \int_x^l y_{(t)} M_{2P}(t) dt, \quad (a)$$

где M_P – балочный изгибающий момент; A^0, B^0 – балочные опорные реакции.

Составим выражения балочного изгибающего момента для первого и второго участков (рисунок 2)

$$M_{1P}(t) = A^0 t = \frac{P(l-x)}{l} t;$$

$$M_{2P}(t) = B^0 (l-t) = \frac{Px}{l} (l-t);$$

$$y_{(t)} = \frac{4f}{l^2} t(l-t). \quad (б)$$

Здесь

$$A^0 = \frac{l(l-x)}{l} \text{ и } B^0 = \frac{Px}{l}$$

определяются из уравнения равновесия (рисунок 2).

Подставляем (б) в (а) и выполняем интегрирование, получаем числитель в формуле (7)

$$\int_0^l y M_P dx = \frac{Pfx(l-x)^2(l+x)}{3l^2}. \quad (8)$$

б) Знаменатель

$$\int_0^l y^2 dx = \int_0^l \frac{16f^2}{l^4} x^2(l-x)^2 dx = \frac{8f^2 l}{15}. \quad (9)$$

Подставляем в (7), (8) и (9), получаем окончательный результат

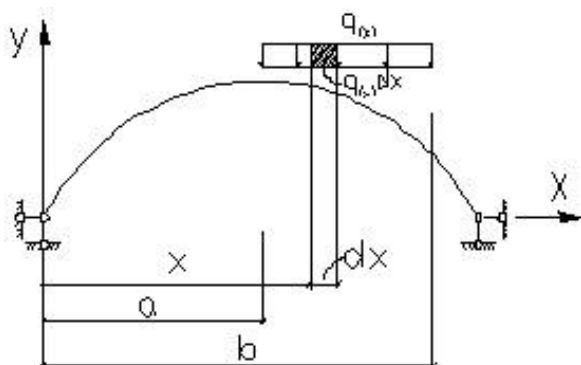


Рисунок 4 – Расчетная схема арки при действии на арку распределенной нагрузки q

$$H = \frac{5}{8fl^3} Px(l-x)(l^2 + lx - x^2). \quad (10)$$

Получили формулу, позволяющую определять распор без решения интегралов.

2. Арка загружена распределенной нагрузкой (рисунок 4).

Выделяем элемент dx , $q(x)dx$ – равнодействующая распределенной нагрузки. Используя формулу (10) получаем величину распора

$$dH = \frac{5}{8fl^3} q(x)dx \cdot x(l-x)(l^2 + lx - x^2).$$

От всей распределенной нагрузки величина распора будет равна

$$H = \sum dH = \frac{5}{8fl^3} \int_a^b q(x)x(l-x)(l^2 + lx - x^2)dx. \quad (11)$$

По формуле (11) можно вычислять распор от распределенной нагрузки, изменяющейся по любому закону.

В полученной формуле (11) для определения распора от распределенной нагрузки интеграл легко решается.

Если на арку действует равномерно распределенная нагрузка $q = \text{const}$, то q выносится за пределы интеграла и тогда формула (11) будет иметь вид

$$H = \frac{5q}{8fl^3} \int_a^b x(l-x)(l^2 + lx - x^2)dx. \quad (12)$$

После того как вычислен распор, легко можно определить внутренние усилия: изги-

бающие моменты, поперечные и продольные силы по известным формулам.

Используя формулы (10) и (12), проще выполнять деформационную проверку правильности построения эпюры M .

В настоящее время для решения различного рода задач строительной механики широко используются как комплекс SCAD, вычислительная среда MathCAD, так и пользовательские прикладные программы.

Для решения ряда задач по строительной механике, например, расчета статически неопределимых арок, есть опыт использования программы (рисунок 5), написанной в среде программирования DELPHI.

Расчет выполняется для двухшарнирной параболической арки при действии различных нагрузок. Программа позволяет определять внутренние усилия (M , Q , N) в каждой точке сечения параболической двухшарнирной арки с последующим построением эпюр изгибающего момента, перерезывающей и продольной сил, а также проверкой правильности построения эпюры M (деформационная проверка).

На панели «Исходные данные» задается пролет арки и стрела подъема, на панели «Нагрузки» – распределенные нагрузки и сосредоточенные силы, действующие на арку. Предусмотрена возможность редактирования, например, удаления нагрузки с арки. В списке «Результаты расчета» отображаются найденные реакции опор, а также результаты деформационной проверки. Панель «Значение в точке» позволяет найти значение внутренних усилий M , Q , N , высоту сечения и другие параметры арки в точке с заданной координатой. Левая панель программы представляет собой расчетную схему с эпюрами изгибающих моментов, перерезывающих и продольных сил, отображающих на соответствующих вкладках. Ползунок справа позволяет изменять масштаб изображения.

Использование средств DELPHI позволяет с большой точностью вести расчет балок, арок, рам.

Аналогичные вычисления можно произвести и в комплексе SCAD, который предназначен для расчетов любых конструкций (балок, арок, рам, пластин и оболочек) и предоставляет обширный выбор возможностей помимо собственно расчета.

Использование SCAD имеет преимущества и позволяет, например, при расчете пластин, оболочек определять внутренние силовые факторы, перемещения и напряжения в любой точке поверхности.

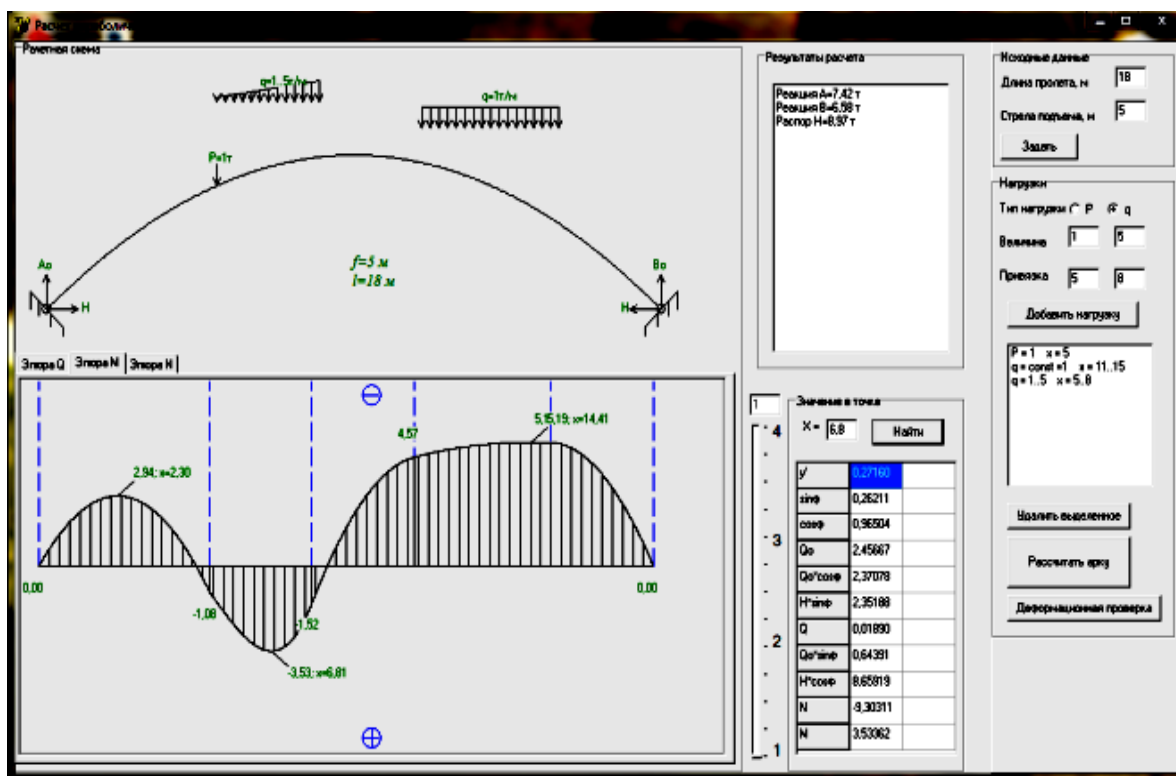


Рисунок 5 – Интерфейс программы для расчета арок

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD: учебное пособие / Э. З. Криксунов, А. А. Маляренко, В. С. Карпиловский. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2008. – 590 с.
2. Калько, И. К. Расчет стержневых систем. Часть 1. Статически определимые системы. Расчет неразрезных балок: учебное пособие / И. К. Калько. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2014. – 80 с. – Режим доступа: <http://elibr.altstu.ru>.
3. Калько, И. К. Расчет стержневых систем. Часть 2. Статически неопределимые системы. Динамика и устойчивость сооружений: учебное посо-

бие / И. К. Калько. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2014. – 95 с. – Режим доступа: <http://elibr.altstu.ru>.

4. Калько, И. К. Расчет статически неопределимых систем в обычной и матричной форме с использованием системы MathCAD: учебное пособие / И. К. Калько, Ю. И. Колмогоров. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2011. – 204 с.

Калько И.К. – к.т.н, доцент кафедры «Строительство автомобильных дорог и аэродромов» ФГБОУ ВО АлтГТУ им. И.И. Ползунова, E-mail: stroygips@list.ru.