

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ НАХОЖДЕНИЯ ПОГРЕШНОСТИ ШУМА КВАНТОВАНИЯ ДЕЛЬТА-СИГМА АЦП

В.И. Диденко, А.В. Иванов, А.С. Воронов

ОАО «МКБ «Компас»

г. Москва

В статье предлагается приближенный метод нахождения погрешности шума квантования дельта-сигма АЦП в любой полосе частот при помощи несложных вычислений, применимый для модуляторов любого порядка.

Ключевые слова: дельта-сигма АЦП, дельта-сигма модулятор, шум квантования, погрешность.

Ранее, в работе [1], были даны аналитические выражения, описывающие СКО шума квантования дельта-сигма АЦП (ДСАЦП) во всём частотном диапазоне для модулятора любого порядка, и для любой полосы частот, но только для модулятора 1-го порядка. Задача нахождения аналитических выражений, описывающих шум квантования для любой полосы частот, является сложной математической задачей уже для модулятора 2-го порядка. Для модуляторов порядка более 2-го представляется крайне сложной.

В данной статье предлагается приближенный метод, позволяющий легко найти описание СКО в любой полосе частот для любого порядка модулятора. Выводы даются на примере модуляторов 1-го и 2-го порядков.

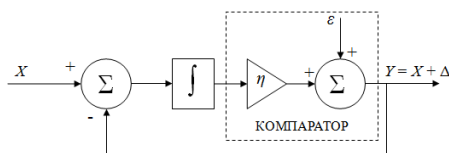


Рисунок 1 – Функциональная схема ДСМ 1-го порядка с линейной моделью компаратора

Рассмотрим сначала дельта-сигма модулятор 1-го порядка. На рис. 1 показана линейная модель такого ДСМ [2]. Выходной сигнал Y является суммой входного сигнала X и погрешности шума квантования $\Delta = f(\epsilon)$, где ϵ — источник шума квантования.

Применяя методы теории автоматического управления [3] найдем комплексный коэффициент передачи шума квантования ϵ на выход ДСМ

$$W(j\omega)_{\text{шума}} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau},$$

где τ — постоянная времени интегратора.

Тогда модуль коэффициента передачи будет:

$$A(\omega)_{\text{шума}} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}.$$

Теперь построим асимптоты для низких частот и высоких частот.

Если $\omega \rightarrow 0$, то $A(\omega)_{\text{шума}} = \tau\omega$ (наклон $\sigma(f_F)$ равен 30 дБ/дек).

Если $\omega \rightarrow \infty$, то $A(\omega)_{\text{шума}} = 1$ (наклон $\sigma(f_F)$ равен 10 дБ/дек).

Таким образом, зависимость $\sigma(f_F)$ будет состоять, из двух асимптотических линий с наклонами 30 дБ/дек и 10 дБ/дек. Точка перегиба будет расположена на частоте

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}. \quad (1)$$

Тогда зависимость СКО шума квантования от полосы частот $\sigma(f_F)$ можно описать следующим выражением:

$$\sigma(f_F) = \begin{cases} k_{10} f_F^{0.5}, & \text{для } f_F = \frac{f_0}{0.5}, \\ k_{30} f_F^{1.5}, & \text{для } f_F = 0 \div \frac{f_0}{f_s}, \end{cases} \quad (2)$$

где f_F — нормированная к частоте f_s стробирования компаратора частота, соответствующая полосе пропускания идеального фильтра.

Теперь осталось только определить значение асимптотического графика в любой точке, чтобы провести асимптоты с рассчитанными наклонами. Удобнее всего в качестве такой точки выбрать точку $f_F = 0.5$. Если на вход ДСМ подан равномерно распределённый случайный сигнал X , лежащий в диапазоне $[0; 1]$. Тогда дисперсия и СКО шума во всей полосе частот, согласно выражению (3) из [1], будут равны:

$$D = \int_0^1 1 - X^2 dX = \frac{2}{3}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (3)$$

Используя (2) и (3), найдём значение коэффициента:

$$k_{10} = \frac{0.8165}{0.5^{0.5}} = 1.1547 \cdot \quad (4)$$

Тогда из (1), (2) и (4) найдём второй коэффициент:

$$k_{30} = \frac{1.1547 f_0^{0.5}}{f_0^{1.5}} = \frac{1.1547 \cdot (2\pi\tau)^{1.5}}{(2\pi\tau)^{0.5}} = 7.2552\tau \cdot$$

Введём вместо τ нормированное значение $\tau_N = \tau \cdot f_s$ (безразмерная величина). Таким образом, (2) преобразуется к виду:

$$\sigma(f_F) = \begin{cases} 1.1547 f_F^{0.5}, & \text{для } f_F = \frac{f_0}{f_s} \div 0.5, \\ 7.2552 \tau_N f_F^{1.5}, & \text{для } f_F = 0 \div \frac{f_0}{f_s}. \end{cases}$$

Если принять, что $\tau = 1 / 2 f_s$, взять $f_s = 512$ кГц, то $\tau_N = 0.5$ и $f_0 = 0.318 \cdot f_s = 167$ кГц.

Теперь проверим полученные зависимости при помощи имитационного моделирования (ИМ). Для этого использовался пакет программ MatLab. На вход ДСМ подавали множество из постоянных равномерно распределённых на интервале $[0; 1]$ случайных сигналов $\{X\}$. На рис. 2 представлены три полученные зависимости: усреднённая практическая, полученная при помощи метода асимптотических линий и зависимость (3) из [1]. График относительных отклонений представлен на рисунок 3.

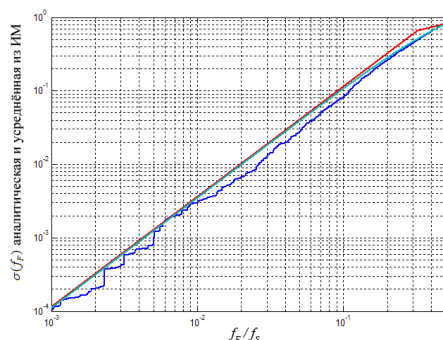


Рисунок 2 – Зависимости СКО от полосы частот, полученные при помощи метода асимптотических линий, выражения (3) из [1] и ИМ для ДСМ 1-го порядка

Относительное отклонение асимптот от аналитической зависимости (3) из [1] показано на рисунке 4. Из рисунка 4 видно, что на низких частотах расхождение составляет всего -4 %. Максимальное отклонение наблюдается в области точки перегиба, что закономерно, и достигает -23 %.

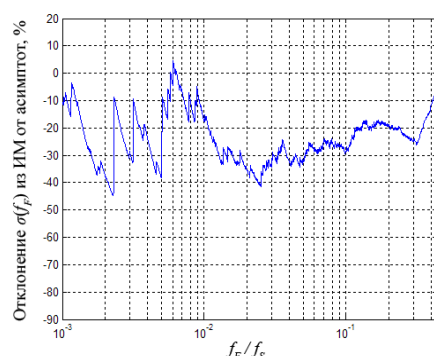


Рисунок 3 – Относительное отклонение СКО по методу асимптотических линий, от результатов ИМ для ДСМ 1-го порядка

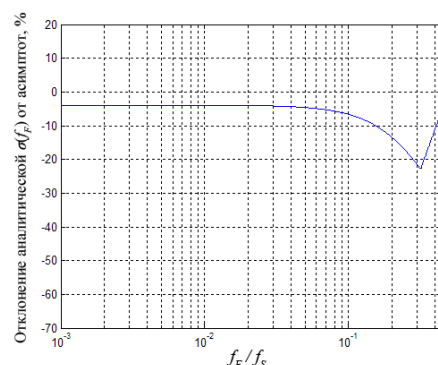


Рисунок 4 - Относительное отклонение СКО по методу асимптотических линий, от расчётов по (3) из [1] для ДСМ 1-го порядка

Полученные результаты могут свидетельствовать о том, что предложенный метод асимптотических линий, хотя и несколько менее точен по сравнению с аналитическими выражениями, вполне может быть применён на практике вместо сложного выражения (3) из [1].

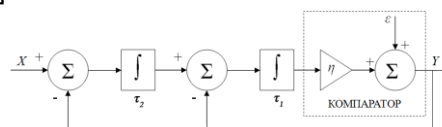


Рисунок 5 – Функциональная схема ДСМ 2-го порядка с линейной моделью компаратора

Теперь применим метод асимптотических линий для модулятора 2-го порядка [4], линейная модель которого представлена на рисунке 5.

Комплексный коэффициент передачи шума для такой линейной модели будет вычисляться по следующей формуле:

$$W(p)_{\text{шума}} = \frac{p^2 \tau_1 \tau_2}{\eta + p \eta \tau_2 + p^2 \tau_1 \tau_2},$$

где τ_1 и τ_2 – постоянные времени 1-го и 2-го интеграторов ДСМ.

Модуль коэффициента передачи равен

$$A(\omega)_{ШУМА} = \frac{\omega^2 \tau_1 \tau_2}{\sqrt{\eta^2 + \omega^2 \eta \tau_2} \eta \tau_2 - 2\tau_1 + \omega^4 \tau_1^2 \tau_2^2}.$$

Если $\omega \rightarrow 0$, то $A(\omega)_{ШУМА} = \frac{\omega^2 \tau_1 \tau_2}{\eta}$ (на-

клон $\sigma(f_F)$ равен 50 дБ/дек).

Если $\omega \rightarrow \infty$, то $A(\omega)_{ШУМА} = 1$ (наклон $\sigma(f_F)$ равен 10 дБ/дек).

График $\sigma(f_F)$ будет состоять из двух асимптотических линий с наклонами 50 дБ/дек и 10 дБ/дек. Точка перегиба будет расположена на частоте:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{\tau_1 \tau_2}}. \quad (5)$$

Таким образом, мы получили, что $\sigma(f_F)$ можно описать следующим выражением:

$$\sigma(f_F) = \begin{cases} k_{10} f_F^{0.5}, & \text{для } f_F = \frac{f_0}{f_s} \div 0.5, \\ k_{50} f_F^{2.5}, & \text{для } f_F = 0 \div \frac{f_0}{f_s}. \end{cases} \quad (6)$$

Значение $\sigma(f_F)$ в точке $f_F = 0.5$ будет равно (3), тогда коэффициент k_{10} равен (4).

Тогда из (5), (6) и (4) найдём второй коэффициент:

$$k_{50} = \frac{1.155 f_0^{0.5}}{f_0^{2.5}} = 45.6 \cdot \tau_1 \tau_2.$$

Введём вместо $\tau_1 \cdot \tau_2$ нормированное значение $\tau_{N2} = \tau_1 \tau_2 \cdot f_s^2$ (безразмерная величина). Таким образом, (6) преобразуется к виду

$$\sigma(f_F) = \begin{cases} 1.155 f_F^{0.5}, & \text{для } f_F = \frac{f_0}{f_s} \div 0.5, \\ 45.6 \tau_{N2} f_F^{2.5}, & \text{для } f_F = 0 \div \frac{f_0}{f_s}. \end{cases}$$

Постоянные времени первого и второго интеграторов обычно выбираются равными [3], тогда если $\tau_1 = 1 / f_s$ и $\tau_2 = 1 / f_s$, то $\tau_{N2} = 1$ и

$$f_0 = \frac{f_s}{2\pi} = 83.44 \text{ кГц.}$$

Теперь проверим полученные зависимости для ДСМ 2-го порядка так же при помощи ИМ. График относительных отклонений представлен на рисунке 6.

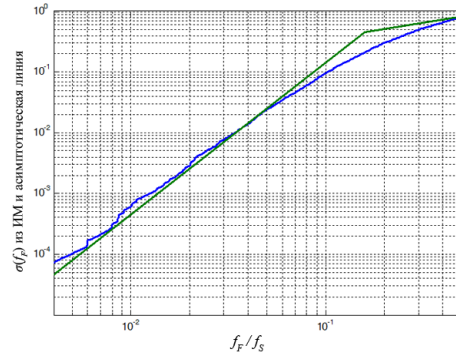


Рисунок 6 – Зависимости СКО от полосы частот, полученные при помощи метода асимптотических линий и ИМ для ДСМ 2-го порядка

Полученные асимптотические линии имеют максимальное расхождение с ИМ в точке перегиба асимптот равное 120%, а для большинства частот лежат в пределах $\pm 20\%$.

Полученные результаты могут свидетельствовать о том, что предложенный метод асимптотических линий, хотя и несколько менее точен по сравнению с аналитическими выражениями, вполне может быть применён на практике для качественного анализа вместо получения сложного аналитического выражения для модуляторов более высокого порядка

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диденко В. И., Иванов А. В. «Метрологический подход к исследованию шума квантования дельта-сигма АЦП», Измерительная техника №5 2009, с. 51-55.
2. Шахов Э.К. «ΣΔ-АЦП: процессы передискретизации, шейпинга шума квантования и децимации», Датчики и системы. - 2006. - №11. - С. 50-57.
3. Попов Е.П. «Теория линейных систем автоматического регулирования и управления». М.: Наука, 1989.
4. Шахов Э.К. «ΣΔ-АЦП: Классификация и математические модели», Датчики и системы. - 2006.-№ 12.- С. 69-76.

Иванов Александр Владимирович – начальник отдела разработки навигационной радиоэлектронной аппаратуры ОАО «МКБ «Компас»; тел.: (495) 951-40-62, e-mail: dzerjinsky@gmail.com; **Воронов Александр Сергеевич** – к.т.н., ведущий инженер – программист ОРНРЭА ОАО «МКБ «Компас»; **Диденко Валерий Иванович** – д.т.н., профессор кафедры ИИТ, "Национальный исследовательский университет "МЭИ".