

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СТРОЙИНДУСТРИИ

И. А. Лысак

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
г. Томск

Теплопередача ограждающих строительных конструкций обусловлена неоднородностью их материала и, обычно, сложным сочетанием процессов теплообмена и теплопроводности. Существующий подход к определению теплового состояния помещений, по мнению ряда авторов, таких как А.Г. Гиндюян и др. [1], основан на чрезмерно упрощенном принципе их расчета в стационарном режиме. Несмотря на то, что основанная на этом принципе [2] методика достаточно хорошо себя зарекомендовала на практике, часто ее использование приводит к учету значительно (около 2-х раз) завышенных значений тепловых потоков через ограждающие конструкции [3]. Что затрудняет ее использование при проведении уточняющих тепловых расчетов, например, при переводе подвальных помещений из одной категории в другую, а так же определения зоны теплового влияния здания на прилегающие грунты. Таким образом, учет нестационарности процесса теплопереноса при расчете тепловых потерь через многослойные ограждающие конструкции является актуальной задачей.

В данной работе предложена математическая модель нестационарного теплового состояния подвального помещения здания. Модель разработана с учетом изменения температуры наружного воздуха окружающей среды, теплопоступлений от инженерных коммуникаций и воздухообмена подвального помещения с окружающей средой.

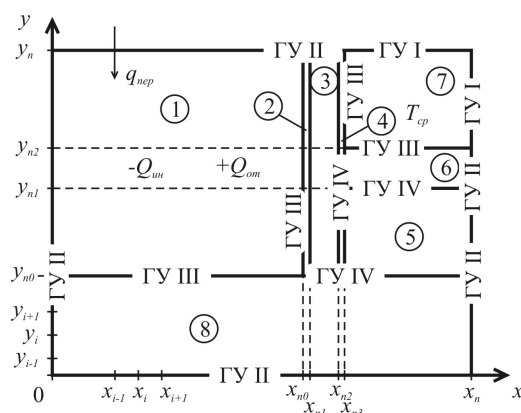
В основе математической модели лежит численная аппроксимация дифференциального уравнения теплопроводности, которое в общем случае имеет вид

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \nabla^2 T + Q, \quad (1)$$

где $T = T(\bar{x}, \tau)$ – температура; C – теплоемкость единицы массы; ρ – плотность; λ – коэффициент теплопроводности; $Q = Q(\bar{x}, T_H)$ – мощность тепловых источников, т.е. количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в единицу объема; $\bar{x}$ – вектор, характеризующий положение точки в простран-

стве; τ – время; T_H – температура наружного воздуха.

Уравнение (1) с надлежащими начальными и граничными условиями представляет задачу о распределении температуры в каждой точке рассматриваемой области для любого момента времени. При этом предполагается, что начальное распределение температуры в материале, температурный режим на его границах и мощность внутренних источников тепловыделения известны, задача симметрична относительно оси y , а в направлении нормальном плоскости x - y является полубесконечной. Это позволяет нам ограничиться решением задачи в двумерной постановке (рисунок 1).



Условные обозначения:

- 1 – воздух внутри подвального помещения; 2 – утеплитель; 3 – наружная стена (железобетон); 4 – наружный слой гидроизоляции; 5, 8 – грунт; 6 – снежный покров; 7 – воздух снаружи подвального помещения; ГУ I, ГУ II, ГУ III, ГУ IV – граничные условия

Рисунок 1 – Расчетная схема математической модели подвального помещения

Начальное условие характеризует распределение температуры во внутреннем объеме помещения в момент времени $\tau = 0$ и имеет вид

$$T = T_{cp} \quad (3)$$

Граничные условия (ГУ) описывают тепловые режимы на границах. При этом в области 7 и на границах x_n (y_{n2} - y_n) и y_n (x_{n3} - x_n)

задана температура наружного воздуха (ГУ I), (рисунок 1)

$$T = T_{cp}(\tau) \quad (4)$$

На границах $0-(0-y_n)$, $0-(0-x_n)$ и $x_n-(0-y_{n2})$ принимаются граничные условия второго рода (ГУ II) подразумевающие отсутствие стока тепла, т.е. производная от температуры по нормали к поверхности приравнивается нулю

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_n = q_n = 0. \quad (5)$$

Тепловое состояние поверхности $y_n-(0-x_{n3})$ характеризуется величиной плотности теплового потока, поступающего через перекрытие первого этажа, тогда зависимость для ГУ II запишется в виде

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_n = q_n(\tau, x). \quad (6)$$

На границах $y_{n0}-(0-x_{n0})$, $x_{n0}-(y_{n0}-y_n)$, $x_{n3}-(y_{n2}-y_n)$ и $y_{n2}-(x_{n3}-x_n)$ установлены граничные условия третьего рода (ГУ III), которые описываются уравнением

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{cm} = \alpha(T_{cm} - T_B), \quad (7)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, α – коэффициент теплоотдачи и температура омывающей поверхность воздуха T_B должны быть известны.

При определении коэффициента теплоотдачи использовались эмпирические зависимости, описывающие теплообмен в условиях естественной конвекции [5]. Среднее значение коэффициента теплоотдачи вычислялось из соотношения

$$\bar{\alpha} = \frac{Nu \cdot \lambda_B}{X}, \quad (8)$$

где X – характерный размер системы; λ_B – коэффициент теплопроводности воздуха, Вт/(м⁰С); Nu – число Нуссельта, определяемое в соответствии с рекомендациями [2].

На границах $y_{n0}-(x_{n0}-x_n)$, $y_{n1}-(x_{n3}-x_n)$, $y_{n2}-(x_{n3}-x_n)$, $x_{n1}-(y_{n0}-y_n)$, $x_{n2}-(y_{n0}-y_n)$ и $x_{n3}-(y_{n0}-y_{n2})$ установлены граничные условия четвертого рода (ГУ IV) которые описываются уравнением

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}. \quad (9)$$

Величина тепlopоступлений от инженерных коммуникаций (трубопроводов системы отопления) вычислялась согласно зависимости, Вт

$$Q_{om} = \frac{\pi \cdot l(T_1 - T_{II})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3}},$$

где d_1 – внутренний диаметр трубопровода, м; d_2 – наружный диаметр трубопровода, м; d_3 – диаметр тепловой изоляции трубопровода, м; α_1 – коэффициент теплопередачи на внутренней стороне цилиндрической стенки; α_2 – коэффициент теплопередачи на наружной стороне изоляции, Вт/(м²С); λ_1 – коэффициент теплопроводности материала трубы; λ_2 – коэффициент теплопроводности тепловой изоляции, Вт/(мС); T_1 – средняя температура теплоносителя, проходящая по трубопроводу; T_{II} – средняя температура в подвальном помещении, С.

Тепловой поток через перекрытие первого этажа [6], Вт

$$Q_{nep} = \frac{F}{R_{nep}}(T_{B.B} - T_{II}), \quad (11)$$

где F – площадь пола первого этажа, м²; R_{nep} – сопротивление теплопередаче перекрытия над подвальным помещением, м²·С/Вт; $T_{B.B}$ – нормируемая температура внутри жилого помещения над подвальным, С.

Тепловые потери на нагрев воздуха, поступающего через вентиляционные продукты вычислялись по зависимости [3], Вт

$$Q_{unf} = 0,28LC_{PB}\rho_B(\Delta T) \quad (12)$$

где L – расход приточного воздуха, м³/ч; C_{PB} – удельная теплоемкость воздуха, кДж/(кгС); ρ_B – плотность воздуха, кг/м³; ΔT – разность температур приточного воздуха и воздуха внутри подвального помещения, С.

Мощность внутренних источников тепловыделения, Вт

$$Q = Q_{om} + Q_{nep} - Q_{unf} \quad (13)$$

При построении математической модели приняты следующие допущения:

- теплофизические свойства материалов (ρ , C_p , λ) ограждающих конструкций, снега, грунта внутри подвального помещения приняты постоянными;

- тепловыделения (Q_{om}) от инженерных коммуникаций, теплота, идущая на нагрев инфильтруемого холодного воздуха через подвальные продукты, учитываемые как отрицательные тепловыделения ($-Q_{un}$) и тепlopоступления через перекрытие первого этажа (Q_{nep}), равномерно распределены по объему помещения;

- температура воздуха внутри помещения 1-го этажа принимается равной нормируемой ($T_B = 20$ С) [7];

- в начальный момент времени ($\tau = 0$) температура всех слоев математической модели равна температуре наружного воздуха ($T = T_{cp}$).

ПОЛЗУНОВСКИЙ АЛЬМАНАХ №1 2011

Для численного решения уравнения (2) применен метод дробных шагов, который основан на предположении, что в первую половину промежутка времени $\delta\tau$ тепло передается в направлении x , а во вторую половину - в направлении y . В соответствии с данным предположением уравнение (2) совместно с начальными и граничными условиями решалось по неявной разностной схеме методом прогонки. Использование метода прогонки обеспечивает абсолютную устойчивость решения относительно шага по времени. Это дает возможность найти оптимальное соотношение между точностью и продолжительностью расчета.

При проведении серии пробных расчетов с различным шагом по времени, было определено, что с увеличением шага по времени точность получаемых результатов меняется незначительно. Таким образом, при использовании данного алгоритма шаг по времени задается исходя из продолжительности расчета, а не точности.

Сравнение теплового поля в модельном объекте, полученного в результате расчета, с известным аналитическим решением двумерной задачи показало удовлетворительную сходимость результатов при количестве шагов по осям более 10. Это подтверждает корректность выбора и реализации расчетной схемы.

На основе вышеизложенного алгоритма решения двумерной задачи теплопроводности при расчете теплообмена подвального помещения с окружающей средой создан программный продукт в объектно-ориентированной среде Delphi (рисунок 2) [8].

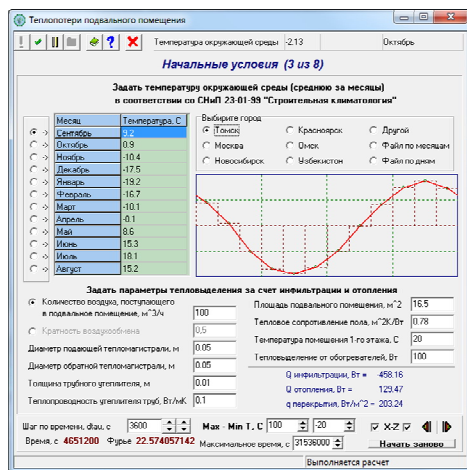


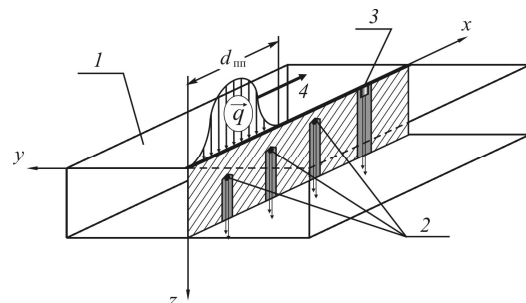
Рисунок 2 – Окно программы моделирования теплового состояния подвального помещения

Сравнение значений теплопотерь через грунт показало удовлетворительную корреляцию эмпирических данных и численным расчетом с использованием разработанной математической модели [3].

Однако для более эффективного использования предложенной методики численного расчета теплопереноса через многослойные ограждающие конструкции необходимо знать теплофизические характеристики (ТФХ) материалов этих конструкций и учитывать их изменение в процессе эксплуатации.

Для оперативного контроля ТФХ строительных материалов в широком диапазоне температур несомненный интерес представляет метод, основанный на численном решении обратной задачи теплопроводности [4].

Математическая модель контроля теплопроводности включает в себя модель источника контрольного воздействия, исследуемого объекта, датчиков и преобразование откликов первичных измерительных преобразователей в сигнал, однозначно определяющий значение теплопроводности исследуемого объекта (рисунок 3). Модель должна обеспечивать вариацию погрешностей измеряемых величин с целью тестирования метода контроля теплопроводности при изменении режимов теплового воздействия в широком диапазоне с целью их оптимизации.



Условные обозначения:

- 1 – образец материала (исследуемый объект); 2 – термопары; 3 – датчик плотности теплового потока; 4 – направление движения теплового потока; $q(x, t)$ – распределенный тепловой поток (источник контрольного воздействия); $d_{пл}$ – диаметр теплового пятна

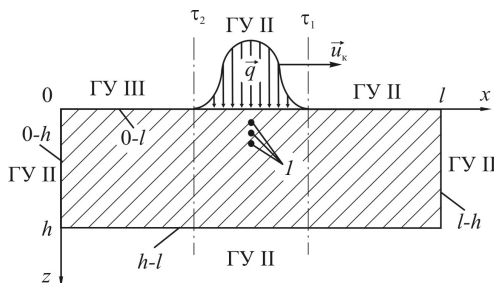
Рисунок 3 – Схема объекта математического моделирования

В основе решения поставленной задачи лежит численная аппроксимация дифференциального уравнения теплопроводности

$$\rho_m C_m \frac{\partial T}{\partial \tau} = \nabla (\lambda_m \nabla T) + Q. \quad (14)$$

Здесь $T = T(\bar{x}, \tau)$ – температура; C_m – теплоемкость единицы массы; ρ_m и λ_m – плотность и коэффициент теплопроводности материала образца; $Q = Q(\bar{x}, \tau)$ – мощность тепловых источников; $\bar{x}$ – вектор, характеризующий положение точки в пространстве; τ – время. Коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность материала могут зависеть от температуры, времени и координат.

Уравнение (14) с надлежащими начальными и граничными условиями представляет задачу о распределении температуры в каждой точке рассматриваемого объема вещества для любого момента времени (рисунок 4). При этом предполагается, что начальное распределение температуры в материале и тепловой режим на его границах известны, внутренние источники тепловыделения отсутствуют, источник нагрева имеет постоянную мощность и перемещается с постоянной скоростью вдоль оси x , коэффициент теплопроводности есть функция температуры $\lambda_m = f(T)$, а вдоль оси y исследуемый объект является полубесконечным, что позволяет ограничиться уравнением в двумерной системе координат.



Условные обозначения:

1 – датчики температуры; $\vec{u}_k$ – вектор скорости перемещения источника нагрева; τ_1 – момент начала теплового воздействия; τ_2 – момент окончания теплового воздействия

Рисунок 4 – Расчетная схема теплообмена модельного образца

На границах $0-h$ и $l-h$ (рис. 4) принимается отсутствие стока тепла

$$\lambda_m(T_n) \left(\frac{dT}{dn} \right)_n = 0. \quad (15)$$

На противоположной тепловоспринимающей поверхности $h-l$ задается соотношение, связывающее значение температуры с величиной теплового потока (граничные усло-

вия третьего рода (ГУ III)). В этом случае тепловой поток пропорционален разности температур границы $T_{ст}$ и окружающей среды T_{oc}

$$-\lambda_m(T_{ст}) \left(\frac{dT}{dn} \right)_{ст} = \alpha(T_{ст} - T_{oc}). \quad (16)$$

Здесь коэффициент теплоотдачи α и температура окружающей среды T_{oc} должны быть известны.

На тепловоспринимающей поверхности $0-l$ приняты сложные граничные условия, зависящие от времени и координат. Условно разделим тепловое воздействие на поверхности $0-l$ на три периода: первый, при $\tau_1 > \tau > 0$, характеризуется отсутствием потока тепла и описывается ГУ II (15); на втором, при $\tau_2 \geq \tau \geq \tau_1$, тепловое состояние поверхности определяется величиной плотности распределенного по поверхности теплового потока, граничное условие в этом случае (ГУ II) запишется в виде

$$-\lambda_m(T_n) \left(\frac{dT}{dn} \right)_n = q_n(\tau, x), \quad (17)$$

распределение относительной плотности потока описывалось гауссовской зависимостью

$$\bar{q}(x) = \frac{q(x)}{q_{max}} = \frac{1,253}{\sqrt{\pi/2}} e^{-2\left(\frac{x}{1,197}\right)^2}, \quad (18)$$

на третьем участке, при $\tau > \tau_2$, происходит охлаждение поверхности в условиях естественной конвекции, что может быть также описано зависимостью (16).

При определении коэффициента теплоотдачи использовались эмпирические зависимости для теплообмена в условиях естественной конвекции на вертикально расположенной пластине [5].

Значение коэффициента теплоотдачи вычислялось из соотношения

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda_r}{b}. \quad (19)$$

Здесь b – характерный размер системы, причем для поверхности $h-l$ это ширина образца, а для тепловоспринимающей поверхности – диаметр теплового пятна, м; λ_r – коэффициент теплопроводности окружающей среды (воздуха), Вт/(м⁰С).

Таким образом, коэффициент теплоотдачи в ламинарном режиме, как наиболее часто имеющем место в настоящих опытах, для вертикальной пластины образца размерами 120×60×20 мм при естественной кон-

векции в диапазоне температур (20–1000) °C может быть аппроксимирован зависимостью

$$\alpha = \alpha_0 \left(1 - e^{-0,025(T - T_{\text{ос}})}\right), \quad (20)$$

причем коэффициент $\alpha_0 = 9,2$ следует выбирать для характерного размера b , равного ширине пластины, а $\alpha_0 = 14,4$ – для b , равного диаметру теплового пятна.

Уравнение (14) совместно с начальными и граничными условиями решалось по неявной разностной схеме методом прогонки с дробными шагами по времени.

Сравнение теплового поля в материале, полученного в результате моделирования, с известным аналитическим решением двумерной задачи показало удовлетворительную сходимость результатов при количестве шагов по x и z более 50, что подтверждает корректность выбора и реализации расчетной схемы. Однако для практического использования рекомендуется разбиение пространственной сетки с количеством шагов равным 300–500 вдоль оси z для более точной интерполяции температуры датчиков в математической модели.

На основе вышеизложенного алгоритма решения двумерной задачи теплопроводности при воздействии движущегося плазменного потока создан программный продукт для численного исследования процессов теплопереноса и расчетного тестирования теплофизических экспериментов [10].

Установление причинно-следственных связей составляет цель прямых задач теплообмена. Наоборот, если по определенной информации о температурном поле требуется восстановить причинные характеристики, то имеем ту или иную постановку обратной задачи теплообмена.

Получить аналитическое решение обратной задачи теплопроводности гораздо сложнее, чем отыскать аналитическое решение прямой задачи. Однако, в большинстве случаев, физические условия задачи, технологические, конструктивные или методические причины таковы, что невозможна постановка прямой задачи по результатам измерений. Таким образом, достаточно простое и легко реализуемое решение обратной задачи позволило бы свести к минимуму такие трудности, как относительно неточные измерения и сложное аналитическое решение прямой задачи [11].

В разработанном методе контроля теплопроводности строительных композиционных материалов тепловое воздействие на

поверхность образца исследуемого материала осуществляется при помощи плазменного потока. Динамика температурного поля в образце регистрируется в трех равноудаленных от нагреваемой поверхности точках при помощи датчиков температуры, а тепловой поток на поверхности – датчика плотности теплового потока. В этом случае решение коэффициентной обратной задачи сводится к минимизации функционала

$$J = \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^3 (T_{pij} - T_{эij})^2, \quad (21)$$

где j – номер текущей температуры; i – номер датчика температуры; T_{pij} – расчетные значения температуры; $T_{эij}$ – экспериментально определенные значения температуры. Причем область поиска решения, а именно коэффициентов линейной зависимости теплопроводности от температуры (2.85), ограничена для строительных композиционных материалов условиями $0 < k_1 < 5$ Вт/(м·°C) и $-10^{-2} < k_2 < 10^{-2}$ Вт/(м·°C²), а для конкретных подклассов (теплоизоляционные, огнеупорные, конструкционные и др.) границы можно существенно сузить.

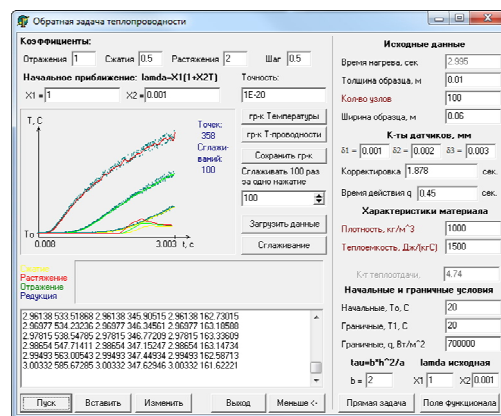


Рисунок 5 – Окно программы определения коэффициента теплопроводности по результатам контрольного воздействия плазменным потоком на материал

Минимизация функционала (21) осуществляется методом нерегулярных симплексов, метод отличается высокой эффективностью и не требует вычисления градиентов функционала, что позволяет организовать на его основе высокопроизводительный и эффективный алгоритм решения коэффициентной обратной задачи. Также симплексный

метод позволяет управлять мерой близости получаемого решения к «точному» и реализовать принцип саморегуляризации обратной задачи теплопроводности, что обеспечивает устойчивость решения.

Обработка термограмм, полученных в процессе измерений при определении теплопроводности испытуемых изделий, включает в себя вычисление плотности теплового потока, временную корреляцию, цифровую фильтрацию, сглаживание и интерполяцию экспериментальных зависимостей, а также решение обратной задачи теплопроводности при помощи разработанного алгоритмического и программного обеспечения (рисунок 5).

Для определения коэффициентов линейной зависимости теплопроводности от температуры с суммарной погрешностью не более 10 % необходимо выполнить следующие условия.

1. Допускаемая суммарная погрешность контроля температуры не должна превышать 25–30 %, а суммарная погрешность контроля поверхностной плотности теплового потока не должна превышать 10–15 %. Эти условия выполняются в процессе измерений.

2. Суммарная погрешность расположения наиболее близкого к нагреваемой поверхности термодатчика не должна превышать 5 %. Это накладывает повышенные требования к технологии установки датчиков в образец. Для обеспечения этого условия использовано устройство на основе индикатора часового типа, контролирующее место установки датчиков с точностью до 0,01 мм.

Разработанное алгоритмическое и программное обеспечение использовалось для текущего контроля теплопроводности при создании строительных золокерамических материалов с целью оптимизации состава шихты для их производства.

В результате решения обратной задачи теплопроводности определены коэффициенты линейной зависимости теплопроводности материала от температуры. Установлено, что с повышением содержания в составе исходного сырья зольных микросфер постепенно утрачивается влияние температуры на теплопроводность изделий.

Влияние состава сырья на теплопроводность золокерамических строительных материалов при 20 °С аппроксимировалось зависимостью

$$\lambda = 0,16 + 0,83 \cdot e^{-0,06 \cdot 3\text{МС}}, \quad (22)$$

где 3МС – процентное содержание зольной микросферы.

Для подтверждения достоверности полу-

ченных результатов теплопроводность золокерамических материалов определялась также методом неограниченного теплового слоя (ГОСТ 7076–87). Значения теплопроводности определены для составов с содержанием зольной микросферы 15, 20, 40, 60, 80 % при температуре $T = 20$ °С и результатов разработанного метода не превысило 10 %.

Таким образом, моделирование нестационарных тепловых процессов, основанное на численном решении уравнения теплопроводности, позволяет значительно повысить качество теплотехнических расчетов в строительстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гиндойн А.Г. Тепловой режим конструкций полов / А.Г. Гиндойн. – М.: Стройиздат, 1984. – 222 с.
2. СНиП 2.04.05 – 91*. Отопление, вентиляция и кондиционирование. – Введ. 28.11.91. – М.: Изд-во стандартов, 1991. – 119 с. – (Строительные нормы и правила).
3. Карауш С.А., Лысак И.А., Анисимов М.В. Математическое моделирование теплового состояния подвального помещения. Вестник ТГАСУ №2 2006 г. Томск: Изд-во Том. архит.-строит. ун-та, 2006. – с. 133-141.
4. Лысак И.А. Экспресс-метод контроля теплопроводности строительных композиционных материалов с использованием высококонцентрированного потока плазмы: Дисс. ... канд. техн. наук. Томск, 2003. – 168 с.
5. Уонг Х. Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров / Х. Уонг. – М.: Атомиздат, 1979. – 216 с.
6. СНиП II-3-79*. Строительная теплотехника. – М.: ГП ЦПП, 1996. – 29с. – (Строительные нормы и правила).
7. СНиП 31-01-2003. Здания жилые многоквартирные. Взамен СНиП 2.08.02 – 89* – Введ. 10.01.2003 – М.: ФГУП ЦНС, 2003. – 25 с. – (Строительные нормы и правила).
8. Лысак И.А., Карауш С.А., Анисимов М.В. Расчет теплотермических потерь подвальных помещений в нестационарном режиме. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2007611123 19.03.2007.
9. Лысак И.А. Программа для определения коэффициента теплопроводности по результатам контрольного воздействия плазменным потоком на материал. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2009610163 11.01.09.
10. Лысак И.А. Программа для анализа режимов плазменной обработки строительных материалов. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2009610164 11.01.09.
11. Бек Дж. Некорректные обратные задачи теплопроводности / Дж. Бек, Б. Блакуэлл, Ч. Сент-Клер. – М.: Мир, 1989. – 310 с.