

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ НА ОСНОВЕ НЕАВТОНОМНОГО ГЕНЕРАТОРА ХАОСА

Т. В. Патрушева, Е. М. Патрушев

Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова
г. Барнаул

Разработка измерительного преобразователя, основанного на неавтономном генераторе хаоса должна включать анализ собственных значений системы дифференциальных уравнений, описывающих данное устройство. В качестве примера для исследования выбран один из представителей семейства генераторов Чуа – MLC-цепь. Обоснования данного выбора изложены в [1].

Цепь Murali-Lakshmanan-Chua (MLC) [2, 3, 4, 5] включает в себя всего 3 линейных элемента (сопротивление, индуктивность и ёмкость) и один нелинейный элемент, называемый диодом Чуа. Поскольку генератор неавтономный – для его работы также необходим источник синусоидальной э.д.с. Схемная реализация приведена на рисунке 1.

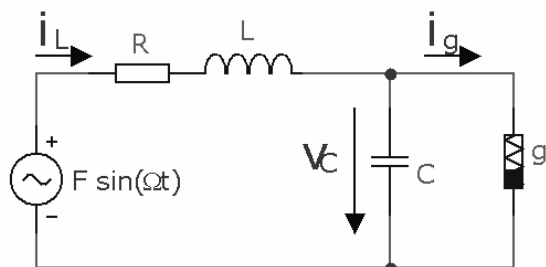


Рисунок 1 – MLC -цепь

Несмотря на исключительную простоту, данная электрическая цепь демонстрирует большое разнообразие колебательных режимов: периодические колебания разных периодов, квазипериодические колебания, динамический хаос, перемежаемость.

Применяя законы Кирхгофа можно составить систему дифференциальных уравнений (1). Несмотря на то, что мы получили всего две независимых переменных (v_C и i_L), хаос в ней возможен, поскольку присутствует ещё сигнал внешнего гармонического воздействия:

$$\begin{cases} C \frac{dv_C}{dt} = i_L - g(v_C) \\ L \frac{di_L}{dt} = -R \cdot i_L - v_C + F \cdot \sin(\Omega t) \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим подробно диод Чуа. Единственный в схеме нелинейный элемент описывается уравнением (2), графически вольт-амперная характеристика приведена на рисунке 2.

$$g(v_C) = G_b \cdot v_C + \frac{1}{2}(G_a - G_b) \cdot (v_C + B_p) - |v_C - B_p| \quad (2)$$

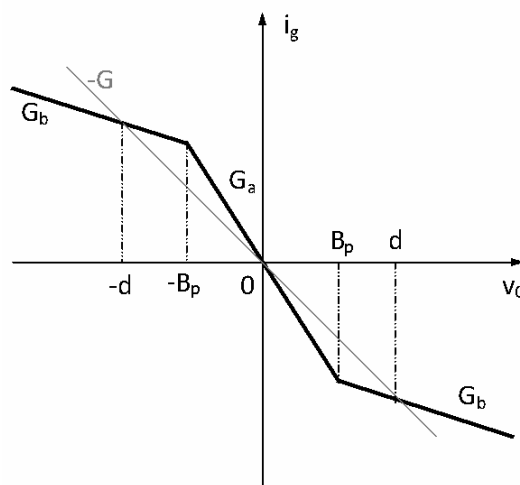


Рисунок 2 – Вольт-амперная характеристика диода Чуа. Также показана прямая $G = -1/R$, от пересечения с которой образуются три точки равновесия $d, 0$ и $-d$

Диод Чуа представляет собой кусочно-линейный преобразователь отрицательного сопротивления. Можно выделить три области – внутренний участок, имеющий крутизну G_a и два внешних, имеющих крутизну G_b . На каждом из участков имеется по одной точке равновесия, обозначенных на рисунке $d, 0$ и $-d$. Таким образом, данная цепь функционирует как обычная линейная, время от времени переключая величину одного из сопротивлений. В моменты времени, когда напряжение v_C по модулю не превышает значения B_p , можно считать, что нелинейный элемент становится линейным с проводимостью G_a , в моменты времени, когда превышает B_p - с

ПОЛЗУНОВСКИЙ АЛЬМАНАХ №1 2011

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ НА ОСНОВЕ НЕАВТОНОМНОГО ГЕНЕРАТОРА ХАОСА

проводимостью G_b . Получение хаоса будет невозможным если оба значения G_a и G_b будут положительными, поскольку сама система в этом случае будет обладать внутренней устойчивостью. Для получения детерминированного хаоса в цепи с кусочно-линейным элементом необходимо, чтобы на разных участках вольт-амперной характеристики фазовое пространство системы имело принципиально разную форму.

Анализ устойчивости точек равновесия проведём исследовав собственные значения автономной линеаризованной системы, аналогично тому, как это сделано в работе [6]. Также выясним границы возможных значений величин элементов схемы.

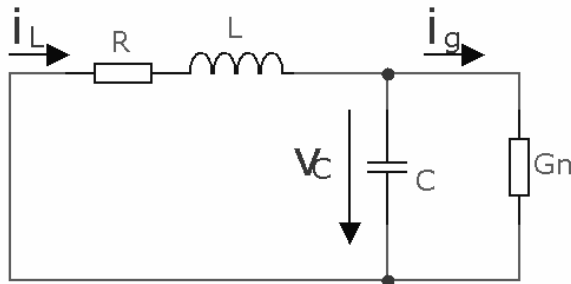


Рисунок 3 – Линеаризованная автономная цепь

Исключим генератор синусоидальной э.д.с. из схемы, а диод Чуа заменим линейной проводимостью G_n , которая в нашем понимании будет принимать одно из значений G_a либо G_b (3):

$$\begin{cases} C \frac{dv_C}{dt} = i_L - G_n \cdot v_C \\ L \frac{di_L}{dt} = -R \cdot i_L - v_C \end{cases} \quad (3)$$

Выполним преобразование к виду с безразмерными величинами:

$$\begin{aligned} v_C &= x \cdot B_p; \quad t = \tau \cdot \frac{C}{G}; \quad i_L = G \cdot y \cdot B_p; \\ G &= \frac{1}{R}; \quad n = \frac{G_n}{G}; \quad \beta = \frac{C}{L \cdot G^2}; \quad a = \frac{G_a}{G}; \\ b &= \frac{G_b}{G}; \quad \omega = \frac{\Omega C}{G}; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y - n \cdot x \\ \frac{dy}{d\tau} = -\beta \cdot y - \beta \cdot x \end{cases} \quad (4)$$

Систему двух уравнений первого порядка запишем в виде одного уравнения второго порядка:

$$\ddot{x} + \dot{x}(n + \beta) + x(\beta n + \beta) = 0 \quad (5)$$

Найдём собственные значения, для этого перепишем уравнение (5) в виде квадратного уравнения (6):

$$p^2 + p(n + \beta) + (\beta n + \beta) = 0 \quad (6)$$

Сделаем ещё одну замену и найдём его корни:

$$2\alpha = (n + \beta); \quad \omega_0^2 = (\beta n + \beta)$$

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0 \quad (7)$$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (8)$$

Вид собственных значений определяет, какие движения в фазовом пространстве выполняет система. Если собственные значения – комплексно сопряжённые числа с отрицательной действительной частью – система демонстрирует затухающие гармонические колебания (устойчивый фокус), с положительной действительной частью – неограниченно возрастающие гармонические колебания (неустойчивый фокус) [7, 8, 9, 10, 11]. Если собственные значения представляют собой действительные числа – имеет место аperiodический процесс – затухающий или неограниченно возрастающий в зависимости от знака. Поскольку нужно учитывать оба участка нелинейной характеристики диода Чуа, получим собственные значения для каждого из них.

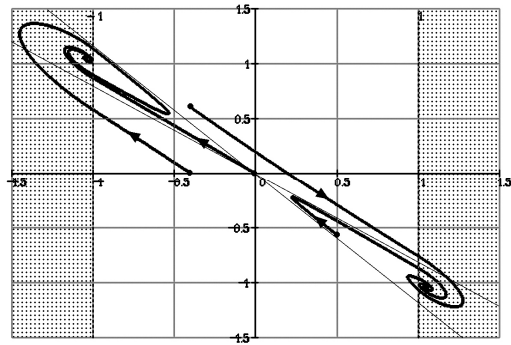


Рисунок 4 – Фазовая диаграмма для автономной MLC-цепи (x-y). Показаны разнообразные траектории в зависимости от начальных условий. По краям диаграммы выделены области, когда диод Чуа работает на внешнем участке своей характеристики, также проведены сепаратрисы

Определим собственные значения, для случая, когда система производит хаос. Согласно [2] значения элементов исходной схемы выбираются следующие: $R=1360 \text{ Ом}$; $L=18 \text{ мГн}$; $C=10 \text{ нФ}$; $G_a=-0,76 \text{ мСм}$; $G_b=-0,41 \text{ мСм}$; $B_p=1 \text{ В}$. Эти значения соответствуют безразмерным величинам $\beta=1$; $a=-1,02$;

$b=-0,55$; $\omega=0,75$ – собственные значения будут $p_1^a = 0,155$; $p_2^a = -0,132$; $p_{1,2}^b = -0,225 \pm i0,632$.

Отсюда видно, что на внутреннем участке характеристики нелинейного элемента система неустойчива, такой вид движения в фазовом пространстве называется седлом. На внешнем участке имеет место затухающий колебательный процесс – устойчивый фокус.

Предложенные значения элементов, конечно, не единственные обеспечивающие хаос, однако предсказать их значения, получив строгие аналитические формулы, как и для большинства других систем с детерминированным хаосом, невозможно.

Определим, каковы должны быть предельные параметры элементов схемы для того, чтобы обеспечить действительные собственные значения с разными знаками на внутреннем участке характеристики диода Чуа (седло) и комплексно-сопряжённые с отрицательной действительной частью на внешнем участке (устойчивый фокус).

Для упрощения выкладок исключим из рассмотрения случаи, когда $n > 0$. Найдём n при которых корни уравнения (7) будут действительными и с разными знаками.

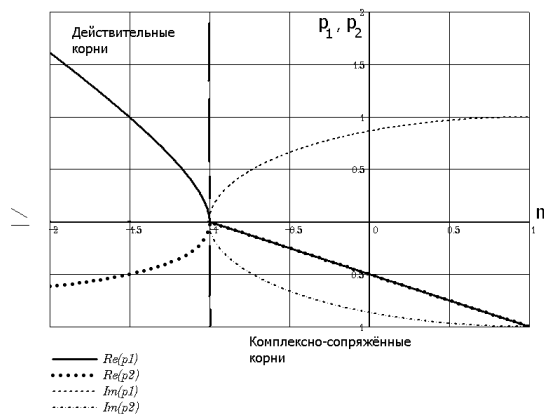


Рисунок 5 – Диаграмма собственных значений в зависимости от n для случая $\beta=1$.

При $n < -1$ решение уравнения (7) – действительные числа; при $n > -1$ комплексно-сопряжённые

Из (8) запишем:

$$\alpha^2 - \omega_0^2 > 0;$$

имеем

$$n < \beta - 2\sqrt{\beta}; \quad (9)$$

также используем

$$-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} > 0 \text{ и } -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < 0;$$

получим

$$n < -1. \quad (10)$$

Следовательно, применяя наше соглашение по переменной n запишем:

$$a < -1, \beta > 0 \quad (11)$$

Найдём n при которых корни будут комплексно-сопряжёнными и с отрицательной действительной частью. Аналогично (9) запишем:

$$n > \beta - 2\sqrt{\beta} \quad (12)$$

ещё, принимая из (8)

$$-\alpha < 0;$$

получим

$$n > -\beta. \quad (13)$$

Используя правило замены n на b запишем:

$$\begin{cases} b > \beta - 2\sqrt{\beta}, \beta > 1 \\ b > -\beta, 0 < \beta < 1 \end{cases} \quad (14)$$

Теперь, после определения (11) и (14) можем сказать, что выбор значений $a=-1,02$ и $b=-0,55$ для $\beta=1$ является вполне обоснованным. На рисунке 6 схематично представлены области возможных значений для a и b в зависимости от выбранного β .

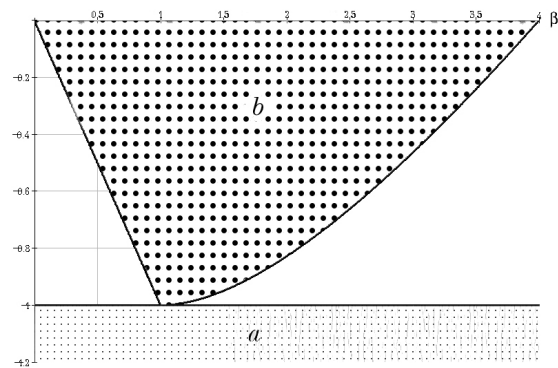


Рисунок 6 – Области возможных значений a и b в зависимости от β

Зададимся теперь обратной целью – выясним, какие значения β будут допустимы если a и b зафиксированы. Нам также понадобится рассмотреть (7) и (8), но теперь относительно β .

Найдём β при которых корни уравнения (7) будут действительными и иметь разные знаки, при этом $n=a$.

Из (10) следует, что если $a < -1$, β может быть любым, также используем

$$-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} > 0,$$

получим

$$\beta > 0 \quad (15)$$

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ НА ОСНОВЕ НЕАВТОНОМНОГО ГЕНЕРАТОРА ХАОСА

Найдём β при которых корни будут комплексно-сопряжёнными и с отрицательной действительной частью. Запишем:

$$b + 2 - 2\sqrt{b+1} < \beta < b + 2 + 2\sqrt{b+1}, \quad (16)$$

при $b > -1$, если $b < -1$ нахождение β становится невозможным. Ещё, из (13) получим

$$\beta > -b. \quad (17)$$

Используя анализ собственных значений можно определить только предельные границы пространства параметров в котором существуют хаотические области. Нахождение этих границ позволит ограничить область поиска хаоса при исследовании системы с помощью бифуркационных диаграмм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Патрушев Е.М., Патрушева Т.В. Исследование механизма чувствительности измерительных преобразователей, основанных на использовании неавтономных генераторов хаоса //Измерение, контроль и информатизация: ИКИ-2011.- Барнаул:АлтГТУ, 2011.с.139-143.
2. M. Lakshmanan , K.Murali. Chaos in Nonlinear Oscillators: Controlling and Synchronization: World Scientific Series on Nonlinear Science, Singapore.-1996, Series A, Vol. 13.-340pp.
3. K. Murali, M. Lakshmanan, L .O. Chua, The simplest dissipative nonautonomous chaotic circuit/ IEEE Trans. Circuits Syst, 1994.Vol.41, pp462-463.
4. K.Murali, M.Lakshmanan, L.O.Chua. Bifurcation and chaos in the simplest dissipative nonautonomous circuit/ Int. J. Bifurcation and Chaos 4.-1994, pp.1511-1524.
5. M.Lakshmanan, K.Murali. Experimental Chaos from Non-Autonomous Electronic Circuits/ Phil. Trans. R. Soc. London.- 1995, pp.33-46.
6. E.Lindberg, K.Murali. An eigenvalue study of the MLC circuit - IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems. Surfing the Waves of Science and Technology (Cat. No.98EX196). IEEE. 1998. Vol.2, pp.521-524.
7. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 428с.
8. V.S. Anishchenko Dynamical Chaos - Models and Experiments. World Scientific, Singapore, 1995, 400 pp.
9. Д.Э.Постнов, А.Н.Павлов, С.В.Астахов. Методы нелинейной динамики: Учеб. пособие для студ. физ. фак. - Саратов, 2008.- 120с.
10. Заславский Г.М., Саргеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса М.: Наука, 1988. -368с.
11. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах.М.: Наука, 1990. —312с.