

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

А. С. Воронов

Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова
г. Барнаул

Не секрет, что теория механических колебаний широко используются в науке и технике. Пьезорезонаторы, устройства на поверхностных акустических волнах, ультразвуковые датчики и т.д. Трудно найти не связанную с механическими колебаниями область. При разработке приборов и систем, основанных на теории колебаний, как правило, используют математическое моделирование. Колебания в этом случае описываются системой дифференциальных уравнений, которая решается аналитически либо численно с использованием популярных математических программных пакетов MathCad, MatLab, SciLab и т.д. Такой подход хорош тем, что позволяет получить максимально точное решение. Однако исчерпывающее описание любой реальной колебательной системы в таком виде сформировать трудно. Например, пьезорезонансный датчик в процессе работы обязательно взаимодействует с элементами крепления и корпусом прибора. Если аналитически учитывать все нюансы его работы, то получится весьма громоздкая система уравнений, требующая серьезных вычислительных затрат для нахождения решения. В итоге, при аналитическом описании систему сильно упрощают, что порождает существенные различия аналитической модели и реального устройства. Другой подход заключается в дискретизации твердого тела на множество взаимодействующих элементов с простым аналитическим описанием. При достаточно малом шаге дискретизации поведение такой системы будет близко к поведению исходного объекта. В области моделирования электрических цепей похожие методы давно используются в языке Spice и таких программных пакетах как MultiSim и MicroCap. Основным аргументом в пользу дискретного моделирования – относительно простые вычисления. Например, в области компьютерной игровой физики компания NVidia уже несколько лет использует такой подход в модуле PhysX. В предлагаемых к модулю демонстрационных программах в реальном масштабе времени производится расчет до 500000 взаимодействующих трехмерных объектов.

В данной работе предлагается быстрый программный алгоритм расчета колебаний в твердом теле и описывается реализация этого алгоритма на языке C# в программной среде Microsoft Visual Studio Express Edition 8. Особенностью разработанного программного обеспечения является возможность моделировать и визуализировать колебания в твердом теле в реальном масштабе времени. Также программа позволяет загружать трехмерные объекты из стандартного формата «*.xaml», что позволяет создавать и редактировать предназначенные для моделирования твердые тела практически в любом 3D редакторе, например в 3DMax, Blender и т.д.

Физической базой алгоритма является система из двух взаимодействующих материальных точек [1]. Объект любой сложности разбивается на конечное число точек N с одинаковой массой, равной $m_i = M/N$. Поведение каждой точки описывается стандартным набором физических величин: положение $\vec{p}_i$, скорость $\vec{v}_i$, ускорение $\vec{a}_i$ и суммарная сила $\vec{F}_i$ (рисунок 1).

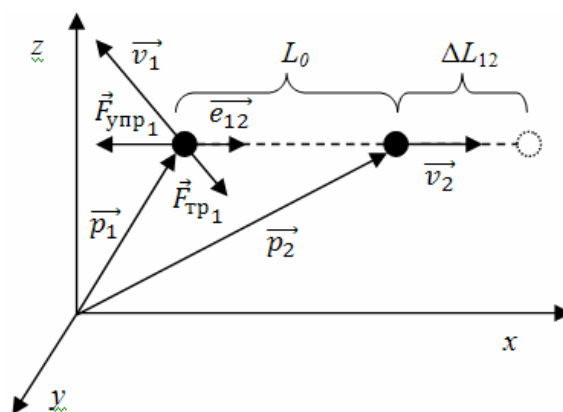


Рисунок 1 – Система из двух взаимодействующих точек

Взаимодействие между каждой парой точек описывается упругой связью. Таким образом, процесс моделирования сводится к вычислению на каждой итерации действующих на точки сил и соответствующего перемещения точек. В графическом модуле программы осуществляется привязка рассчи-

танного массива физических точек к исходному графическому объекту. Это позволяет отображать результаты моделирования, используя весь арсенал современных графических средств. Это могут быть как простые каркасные графические объекты, так и сложные текстурированные сцены с эффектами освещения, прозрачности, размытия и т.д.

Опишем основные допущения, принятые в предлагаемом алгоритме.

1. Объект любой сложности представляет собой сеть, составленную из точек и связей между ними. Расчет сети ведется последовательно по всем связям. На точки могут быть установлены дополнительные ограничения, такие как диапазон перемещений (например, нулевое перемещение или жестко закрепленная точка) и привязка к другой точке (жесткая механическая связь). Это позволяет реализовать помимо колебаний элементарные механические взаимодействия между телами.

2. Упругость связи между парой точек установлена в соответствии с законом Гука:

$$\vec{F}_{уп} = -k\Delta L_{12}\vec{e}_{12},$$

где k – коэффициент упругости [кг/с²], ΔL_{12} – предполагаемое изменение расстояния между точками 1 и 2, $\vec{e}_{12}$ – единичный вектор, указывающий направление от первой точки до второй. Такой подход не является единственным возможным. Фактически это максимально производительная линейная аппроксимация упругих сил действующих в малом объеме твердого тела. Однако итоговый суммарный результат работы алгоритма близок к аналитическому результату для простых колеблющихся твердых тел [2].

3. В системе присутствует изотропное вязкое трение:

$$\vec{F}_{тр1} = -r\vec{v}_1,$$

где r – коэффициент трения [кг/с], $\vec{v}$ – текущая скорость точки. С физической точки зрения этот параметр является свойством материала, характеризующим потерю энергии колебания в единицу времени. С вычислительной точки зрения наличие этого параметра значительно улучшает сходимость алгоритма.

Таким образом, суммарная сила, действующая на точку с учетом всех связей, описывается уравнением:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{упi} + \vec{F}_{тр},$$

следовательно, ускорение равно:

$$\vec{a}_i = - \frac{\sum_{j=1}^N k_i \Delta L_{ij} \vec{e}_{ij} + k \vec{v}_i}{m_i}. \quad (1)$$

Наличие коэффициента упругости k_i для каждой точки позволяет при необходимости реализовать анизотропные свойства твердого материала.

4. Зная ускорение точки (1), имеем два дифференциальных уравнения движения:

$$\vec{a} = \partial \vec{v} / \partial t, \vec{v} = \partial \vec{p} / \partial t. \quad (2)$$

Так как мы имеем дело с дискретной системой, решим систему (2) численно, используя метод Эйлера [2], т.е. заменим дифференциал ∂t малым приращением Δt , тогда:

$$\begin{cases} \vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \vec{a}_i \Delta t \\ \vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \vec{v}_i \Delta t \end{cases} \quad (3)$$

Существуют и другие методы численного решения данной системы, однако по производительности они сильно уступают методу Эйлера. Единственное тонкое место алгоритма – оптимальный выбор интервала времени Δt . С одной стороны малое время приведет к большому количеству вычислений, с другой стороны большое время приведет к ошибочным результатам. Например, объект, состоящий из 10000 точек, рассчитывается на среднем компьютере за 30 мс. Следовательно, можно это время выбрать в качестве Δt , однако если точки объекта за этот интервал времени существенно меняют свое положение, то будет большая суммарная ошибка. В результате Δt подбирается экспериментально для каждого конкретного случая. Вероятно, есть смысл сделать адаптивный алгоритм расчета Δt в зависимости от текущей средней скорости точек.

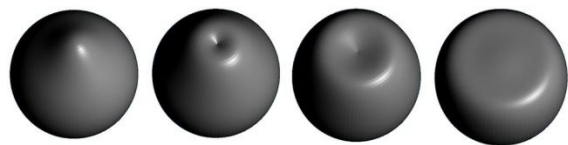


Рисунок 2 – Колебания в сферическом теле при сильном точечном возмущении

На рисунке 2 представлены результаты работы программы при моделировании колебаний в сферическом теле при сильном точечном возмущении.

В перспективе разработанное программное обеспечение может вырасти до полноценного математического пакета, предназначенного для моделирования колебаний в твердых телах. Для этого ядро программы необходимо оснастить библиотекой материа-

лов и специализированными средствами для редактирования тел и связей между ними. Аналогом является программная среда FLOW-3D, предназначенная для моделирования поведения жидких сред и газов. Необходимость в программных пакетах этой направленности очевидна. Во-первых, производительность современных компьютеров позволяет производить расчеты именно таким методом. Во-вторых, широкий диапазон возможных применений. Это анализ вибраций в инженерных сооружениях и автомобилях, расчет частотных характеристик звуковоспроизводящего оборудования, синтез оптимальных форм резонаторов и т.д. Не стоит забывать, что в некоторых областях виртуальное моделирование, возможно, единственно доступный на сегодняшний день метод

детального анализа. Например, у пьезорезонансного датчика амплитуда колебаний чувствительной поверхности находится в диапазоне 10^{-9} - 10^{-11} метра. Измерить такие малые перемещения достаточно проблематично даже для одной точки, а экспериментально получить полную картину колебаний вообще не представляется возможным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Майер Р.В. Компьютерное моделирование физических явлений. – Глазгов: ГГПИ, 2009. – 112 с.
2. Справочник для инженеров и студентов: Высшая математика. Физика. Теоретическая Механика. Сопротивление материалов. / Полянин А.Д. Полянин В.Д. Попов В.А. и др. – М.: Международная программа образования, 1996. – 432 с.