

УСТАНОВЛЕНИЕ РАБОЧЕЙ ОБЛАСТИ ХАОТИЧЕСКОГО РЕЖИМА В АВТОГЕНЕРАТОРНОМ ИЗМЕРИТЕЛЬНОМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕ НА ОСНОВЕ ЦЕПИ ЧУА

Патрушева Т.В., Патрушев Е.М.

Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова
г. Барнаул

На основе теории детерминированного хаоса выполним анализ режимов в измерительном преобразователе на основе хаотического осциллятора [1]. Цепь Чуа — это простая электронная схема, демонстрирующая целый ряд бифуркационных явлений и аттракторов (рисунок 1). Цепь состоит из двух конденсаторов, катушки индуктивности, линейного резистора и нелинейного резистора (обычно называемого диодом Чуа) [2].

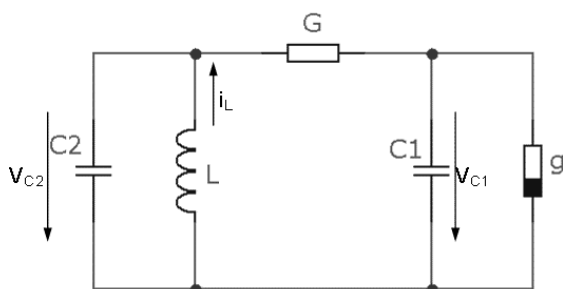


Рисунок 1 – Цепь Чуа. L,G,C1,C2-пассивные элементы, g-диод Чуа. В классическом варианте предлагаются следующие значения элементов: $L=1/7\text{Гн}$; $G=0.7\text{См}$; $C1=1/9\text{Ф}$; $C2=1\text{Ф}$

Уравнение цепи имеет вид:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = G(v_{C2} - v_{C1}) - g(v_{C1}) \\ C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = G(v_{C1} - v_{C2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} = -v_{C2} \end{cases} \quad (1)$$

где $g(v_{C1})$ – вольт - амперная характеристика диода Чуа, определяемая как

$$g(v_{C1}) = G_b \cdot v_{C1} + \frac{1}{2}(G_a - G_b) \left(|v_{C1} + E| - |v_{C1} - E| \right) \quad (2)$$

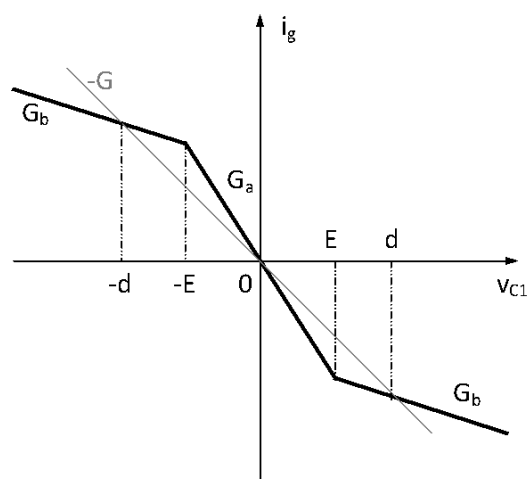


Рисунок 2 - Вольт-амперная характеристика диода Чуа. Также показана нагрузочная прямая, от пересечения с которой образуются три точки равновесия d, 0 и -d

Анализ режимов в осцилляторе Чуа можно провести считая систему линейной на каждом из трёх участков вольт-амперной характеристики диода Чуа. Действительно, считая отрицательное сопротивление линейным можно считать систему уравнений (1) линейной, при этом $g(v_{C1})$ нужно заменить на G_a или G_b для внутреннего и внешнего участков кусочно-линейной характеристики соответственно. Решение такой системы возможно через нахождение собственных значений. Для этого запишем матрицы:

$$M_0 = \begin{pmatrix} -\frac{G}{C_1} - \frac{G_a}{C_1} & \frac{G}{C_1} & 0 \\ \frac{G}{C_2} & -\frac{G}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{G}{C_1} - \frac{G_b}{C_1} & \frac{G}{C_1} & 0 \\ \frac{G}{C_2} & -\frac{G}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Нахождение собственных значений возможно решением относительно λ уравнений:

$$|M_0 - \lambda E| = 0, |M_1 - \lambda E| = 0; \quad (6)$$

где E – единичная матрица

Решение уравнений (6) определяет режимы колебаний системы (1). Так как электрическая схема содержит три независимых реактивных элемента, то и уравнения (6) будут кубическими полиномами. Возникновение хаотических колебаний возможно только в случае одного действительного и пары комплексно-сопряжённых корней. Обозначим решения (6) как $\gamma_0, \sigma_0 \pm j\omega_0$ и $\gamma_1, \sigma_1 \pm j\omega_1$ соответственно. Причём $\gamma_0 > 0$, $\sigma_0 < 0$, $\gamma_1 < 0$, $\sigma_1 > 0$ – хотя эти условия не являются достаточными для возникновения хаотических колебаний. Знаки указанных величин определяют тип траекторий в окрестности соответствующей точки равновесия. В обоих случаях это седло-фокусы, но разного характера.

На внутреннем участке вольт-амперной характеристики действительный корень γ_0 положительный, то есть присутствует апериодический разгон при соответственном периодическом затухании. Но так как в фазовом трёхмерном пространстве указанные движения имеют разные (хоть и не перпендикулярные) направления, имеет место наложение траекторий. Иными словами траектория движения имеет вид спирали сходящейся к некоторому стержневому направлению. Напротив, на внешнем участке рабочей характеристики нелинейного элемента траектория спиральная расходящаяся, но лежащая практически в одной плоскости. Степень раскручивания спирали на внешней траектории определяется величиной σ_1 , и чем она больше, тем значительнее межвитковое расстояние.

Для лучшей визуализации процесса изобразим в фазовом пространстве траекторий соответствующие векторы и плоскости. Для внутреннего участка запишем уравнения для вектора и для плоскости:

$$\left(\gamma_0 + \frac{G + G_a}{C_1} \right) x = \frac{G}{C_1} y = -\gamma_0 \frac{LG}{C_1} z \quad (7)$$

$$\left(\left(\sigma_0 + \frac{G + G_a}{C_1} \right)^2 + \omega_0^2 \right) x - \left(\frac{G}{C_1} \cdot \frac{G + G_a}{C_1} \right) y + \frac{LG}{C_1} (\sigma_0^2 + \omega_0^2) z = 0 \quad (8)$$

Аналогично, для внешнего участка рабочей характеристики можно получить уравнения, заменив в уравнениях (7) и (8) G_a на G_b и $\gamma_0, \sigma_0, \omega_0$ на $\gamma_1, \sigma_1, \omega_1$. На рисунке 3 представлено фазовое пространство в режиме «двойной завиток», обозначены плоскости E_0 и E_1 для внутреннего и внешнего участков а также U_1 и $U-1$ показывающие разделение фазового пространства на области соответствующие разделению по участкам кусочно-линейной характеристики. Действительно, траектория движения по плоскости E_1 имеет вид раскручивающейся спирали, которая в некоторый момент может перейти за точку пересечения плоскостей E_1 , U_1 и E_0 . Именно в этот момент траектория оказывается с другой стороны от плоскости E_0 и переходит в область пространства за $U-1$. Так как характеристика $g(vC_1)$ имеет симметричный вид, то и пространство, изображённое на рисунке 2 также симметрично и поведение системы в нижней области имеет схожие черты. Таким образом, траектория движения системы посещает окрестности всех трёх точек равновесия.

Существование аттрактора «двойной» завиток возможно при сочетании следующих факторов: $G_a < -G$; $G_b > -G$; собственные значения $\gamma_0 > 0$, $\sigma_0 < 0$, $\gamma_1 < 0$, $\sigma_1 > 0$; величина σ_1 должна быть достаточно большой, чтобы обеспечить необходимый разгон на внешнем участке траектории. При этом недостаточность разгона можно компенсировать удалением точки d от плоскости U_1 (рисунок 3), т.е. уменьшением G_a .

В каждой из трёх областей пространства, представленного на рисунке 3 соблюдаются законы линейного движения, также следует отметить, что траектория движения никогда себя не пересекает и при этом переход из одной области пространства в другую происходит каждый раз при разных начальных условиях.

Более наглядный анализ траектории движения можно выполнить с помощью численного расчёта непосредственным решением системы уравнений (1). Одним из известных средств для этого является расчётная программа ABC++ , созданная для Matcad [3].

На рисунке 4 показано сечение аттрактора горизонтальной плоскостью представляющее собой двойной завиток, который дал название аттрактору. Распределение точек по завитку неравномерное и меняется при изменении параметров схемы. Следует также отметить фрактальный характер распределения.

На рисунке 5 построено сечение Пуанкаре вертикальной плоскостью. Видны отверстия вокруг верхней и нижней точек неустойчивого равновесия. Также следует указать на наличие многослойной (спиральной) структуры во внутренней области аттрактора и значительного «сплющивания» во внешней.

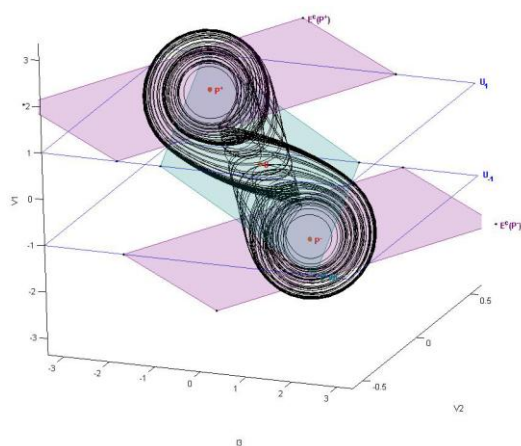


Рисунок 3 – Аттрактор «двойной завиток» представлен в координатах $vC1$, $vC2$, iL построен с помощью ABC++ в Matcad

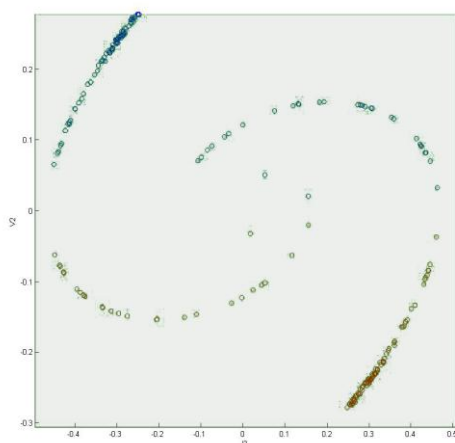


Рисунок 4 – «Двойной завиток» – сечение Пуанкаре плоскостью $vC1=0$, представлено в координатах $vC2$, iL .

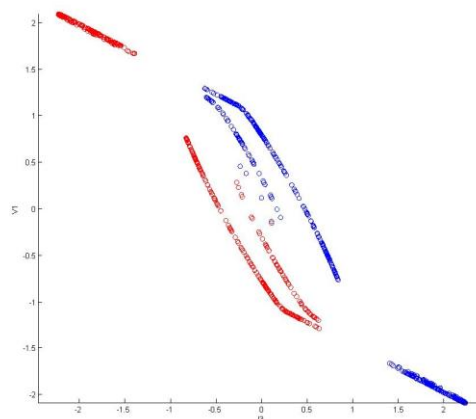


Рисунок 5 – Сечение Пуанкаре плоскостью $vC2=0$, представлено в координатах $vC1$, iL

Благодаря своей высокой информативности и широким возможностям управления хаосом, а также своей кусочно-линейной природе аттрактор «двойной завиток» является очень удобным режимом для построения измерительных преобразователей автогенераторного типа а также в датчиковых структурах большой сложности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Патрушева Т.В., Патрушев Е.М. К вопросу о применимости осцилляторов хаотических колебаний в устройствах контроля физических величин – в этом сборнике
2. Бугаевский М.Ю., Пономаренко В.И. Исследование поведения цепи Чуа. Учебно-методическое пособие, — Саратов: Издательство ГосУНЦ «Колледж», 1998. — 29 с.
3. Kennedy, M.P. ABC (Adventures in Bifurcation and Chaos): a program for studying chaos. Journal of the Franklin Institute, vol.331B, no.6,1994. pp.631-658.