ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ, ДОПУСКАЮЩЕЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Ю.В. Бебихов
Алтайский государственный технический университет,
г. Барнаул, Россия

Введение

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) используется при описании многих физических процессов. Дискретная версия этого уравнения также привлекает внимание исследователей в различных областях естествознания.

Рассмотрим НУШ с кубической нелинейностью:

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0\,. \qquad (1)$$

Рассмотрим следующую двухпараметрическую дискретизацию уравнения (1):

$$i\dot{\psi}_n + \frac{1}{2h^2}\left(\psi_- - 2\psi_n + \psi_+\right) + \frac{\lambda}{2}\delta_1\psi_n\left(|\psi_-\psi_n| + |\psi_n\psi_+|\right) + \frac{\lambda}{2}\delta_2\left(\psi_- + \psi_+\right)|\psi_n|^2 + \frac{\lambda}{2}\delta_3\left(\psi_-^* + \psi_+^*\right)\psi_n^2 = 0, \qquad (2)$$

с коэффициентами, связанными соотношением,

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1\,, \qquad (3)$$

гарантирующим, что в континуальном пределе ($h \to 0$) уравнение (2) придет к виду НУШ (1).

В общем случае уравнение (2) неинтегрируемо, но соответствующая ему стационарная задача интегрируема. Запишем двухточечную задачу для нахождения амплитуд стационарных решений уравнения (2) вида $\psi_n(t) = f_n e^{i\omega t}$ в следующем виде

$$\left(f_n - f_-\right)^2 + 2(1-\Omega) f_- f_n + \Lambda f_-^2 f_n^2 + S = 0, \qquad \Omega = 1 + \omega h^2, \qquad \Lambda = \lambda h^2, \qquad S = Ch^2. \qquad (4)$$

Решая квадратное уравнение (4) приходим к отображению

$$f_n(f_-) = \frac{\Omega f_- \pm \sqrt{D}}{1 + \Lambda f_-^2}, \qquad D = \Omega^2 f_-^2 - \left(1 + \Lambda f_-^2\right)\left(S + f_-^2\right), \qquad (5)$$

из которого могут быть найдены все стационарные решения уравнения (2). Многие из этих решений могут быть получены в явном виде в терминах эллиптических функций Якоби.

Уравнение (4), определяющее амплитуды статических решений уравнения (2), имеет решения вида

$$f_n = \pm A \,\mathrm{sn}^q(Z,m)\,\mathrm{cn}^r(Z,m)\,\mathrm{dn}^s(Z,m), \quad Z = \beta h(n + x_0), \qquad (6)$$

где sn, cn и dn это эллиптические функции Якоби, $0 \le m \le 1$ - модуль эллиптических функций Якоби, A и β - параметры решения и x_0 - произвольный сдвиг, свидетельствующий о трансляционной инвариантности модели и, наконец, целые числа q, r, и s определяют конкретную форму решений, перечисленных ниже.

Решение sn, $(q,r,s) = (1,0,0)$,

$$\mathrm{cn}(\beta h)\,\mathrm{dn}(\beta h) = \Omega, \quad A = \sqrt{\frac{-m}{\Lambda}}\mathrm{sn}(\beta h), \quad S = \frac{1}{m}\Lambda A^4; \qquad (7)$$

Решение cn, $(q,r,s) = (0,1,0)$,

$$\frac{\mathrm{cn}(\beta h)}{\mathrm{dn}^2(\beta h)} = \Omega, \quad A = \sqrt{\frac{m}{\Lambda}}\frac{\mathrm{sn}(\beta h)}{\mathrm{dn}(\beta h)}, \quad S = \frac{m-1}{m}\Lambda A^4; \qquad (8)$$

Решение dn, $(q,r,s) = (0,0,1)$,

$$\frac{\mathrm{dn}(\beta h)}{\mathrm{cn}^2(\beta h)} = \Omega, \quad A = \sqrt{\frac{1}{\Lambda}}\frac{\mathrm{sn}(\beta h)}{\mathrm{cn}(\beta h)}, \quad S = (1-m)\Lambda A^4; \qquad (9)$$

Решение 1/sn, $(q,r,s) = (-1,0,0)$,

$$\mathrm{cn}(\beta h)\,\mathrm{dn}(\beta h) = \Omega, \quad A = \sqrt{\frac{-1}{\Lambda}}\mathrm{sn}(\beta h), \quad S = m\Lambda A^4; \qquad (10)$$

Решение 1/cn, $(q,r,s) = (0,-1,0)$,

$$\frac{\mathrm{cn}(\beta h)}{\mathrm{dn}^2(\beta h)} = \Omega, \quad A = \sqrt{\frac{m-1}{\Lambda}}\frac{\mathrm{sn}(\beta h)}{\mathrm{dn}(\beta h)}, \quad S = \frac{m}{m-1}\Lambda A^4; \qquad (11)$$

Решение sndn/cn, $(q,r,s) = (1,-1,1)$,

$$\frac{m\,\mathrm{cn}^4(\beta h) + 1 - m}{\mathrm{cn}^2(\beta h)} = \Omega, \; A = \sqrt{\frac{-1}{\Lambda}}\frac{\mathrm{sn}(\beta h)\,\mathrm{dn}(\beta h)}{\mathrm{cn}(\beta h)}, \; S = \Lambda A^4. \qquad (12)$$

Кроме того, могут быть найдены точные *движущиеся* решения уравнения (3.36), из которых приведем светлый солитон

$$\psi_n(t) = A\,\mathrm{sech}\left[\beta h(n + x_0 - vt)\right]\exp\left[i(\omega t + \alpha n + \phi_0)\right], \qquad (13)$$

$$\cos\alpha = -\frac{\delta_1}{2\delta_3}, \quad v = \frac{\sin\alpha\sinh(\beta h)}{\beta h^3},$$

$$1 + \omega h^2 = \cos\alpha\cosh(\beta h), \quad A^2 = \frac{\sinh^2(\beta h)}{\lambda h^2(\delta_2 - \delta_3)};$$

темный солитон (кинк)

$$\psi_n(t) = A\tanh\left[\beta h(n + x_0 - vt)\right]\exp\left[i(\omega t + \alpha n + \phi_0)\right], \qquad (14)$$

$$\cos\alpha = -\frac{\delta_1}{2\delta_3}, \quad v = \frac{\sin\alpha\tanh(\beta h)}{\beta h^3},$$

$$1 + \omega h^2 = \cos\alpha\,\mathrm{sech}^2(\beta h), \quad A^2 = \frac{\tanh^2(\beta h)}{\lambda h^2(\delta_3 - \delta_2)};$$

и инвертированный кинк

$$\psi_n(t) = \frac{A\exp\left[i(\omega t + \alpha n + \phi_0)\right]}{\tanh\left[\beta h(n + x_0 - vt)\right]}, \qquad (15)$$

параметры которого такие же, как и у кинка (14).