

О ВОЗМОЖНОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ: МОДЕЛЬ ОТКЛИКА ВИХРЕТОКОВОГО ТРАНСФОРМАТОРНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

С.Ф. Дмитриев, А.В. Ишков, Т.М. Ханина

Алтайский государственный университет, г. Барнаул, Россия

На основании численного решения уравнения Гельмгольца для векторного потенциала получена модель отклика вихретокового трансформаторного преобразователя, находящегося вблизи многослойной проводящей композиционной среды с различными параметрами. После анализа поведения функций $F_p(\lambda)$ и Φ , предложено искать численные решения уравнений для напряженности электрического и магнитного полей аппроксимацией экспоненциальным рядом.

Метод вихревых токов является одним из основных неразрушающих методов исследования проводящих материалов. Он основывается на взаимодействии электромагнитного поля специального датчика – вихретокового трансформаторного преобразователя (ВТП) и исследуемого объекта [1]. И если в дефектоскопии и исследованиях свойств сплошных сред ВТП нашли широкое применение, то расчеты зависимости импеданса от реальной части комплексного вносимого напряжения в измерительную обмотку для таких датчиков при их нависании над средой композиционного материала в литературе не описаны [2]. В настоящей статье мы подведем теоретическую основу для расчета напряжения в измерительной обмотке ВТП, вносимого вихревыми токами, возникающими в многослойной среде композиционного материала.

Для упрощения решения задач подобного рода введём ряд допущений, связанных с особенностями поля вихревых токов, среды и их взаимодействия [3]. Так электромагнитное поле, возбуждающее вихревые токи в материале, будем считать квазистационарным, так как волновыми процессами в среде можно пренебречь ввиду того, что ее размеры значительно больше длины волны, а потери на излучение ничтожны. В проводящем теле рассматриваются процессы, обусловленные только наличием электрической проводимости и магнитной проницаемости, токи смещения не учитываются. Поскольку напряженность магнитного поля невелика, можно считать $\mu = \text{const}$. В рамках сделанных допущений на первом этапе решения реальные источни-

ки электромагнитного поля заменяются электрической нитью, рамкой или витком с пренебрежительно малым сечением токоведущих частей, а для получения зависимости отклика ВТП от параметров среды композиционного материала требуется решить уравнение Максвелла, с граничными условиями, зависящими от структуры рассматриваемых моделей среды и конструкции датчика.

При нависании витка с током над многослойной средой в плоскости, параллельной границам раздела слоёв (рис.1), уравнения Максвелла для среды принимают вид:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{ст}}; \quad \text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \quad (1)$$

где $\vec{H}$ и $\vec{E}$ – векторы напряженности соответственно магнитного и электрического полей; $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции; $\vec{J}_{\text{ст}}$ – вектор плотности полного тока.

Уравнения Максвелла можно свести к уравнению Гельмгольца для векторного потенциала $\vec{A}$ [2, 4], определяемого выражением $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, которое, если ток в витке изменяется по гармоническому закону с круговой частотой ω , приводится к неоднородному уравнению Гельмгольца.

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{J}_{\text{стоп}}, \quad (2)$$

где $k^2 = -j\omega\mu_a\sigma$; $j = \sqrt{-1}$; σ – удельная электропроводимость; μ – магнитная проницаемость; μ_0 – магнитная постоянная.

Уравнение (2) в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \left(\frac{1}{\rho} - k^2 \right) A = -\mu\mu_0 j_{\text{ст}}$$

Это уравнение решается методом интегрального преобразования Фурье-Бесселя с ядром в виде функции Бесселя первого рода первого порядка [5]. Уравнение для преобразованного векторного потенциала A^* имеет вид:

$$\frac{\partial^2 A^*}{\partial z^2} - q^2 A^* = -\mu\mu_0 j_{ct}^* \quad (3)$$

где $A^* = \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) A(\rho, z) d\rho$; $J_1(\lambda\rho)$ -

функция Бесселя первого рода;
 $q^2 = \lambda^2 + \kappa^2$; λ - параметр интегрирования;

$$J_{ct}^* = \int_0^\infty \rho J_1(\lambda, \rho) j_{ct} d\rho = \int_0^\infty \rho J_1(\lambda, \rho) j \delta(z) dz = j_a(\lambda_a) \delta(z)$$

- преобразованная плотность тока.

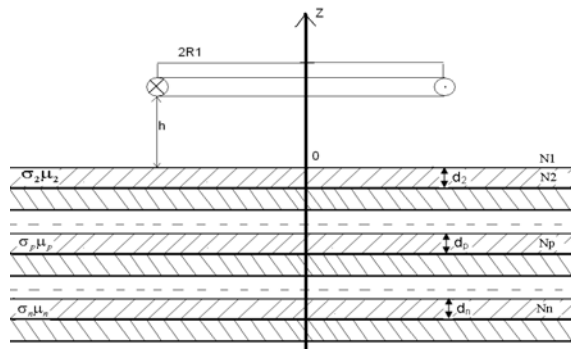


Рисунок 1 – Модель многослойной композиционной среды: R - радиус витка, h - расстояние между витком и поверхностью, d - толщина слоя, σ и μ - удельная электропроводность и магнитная проницаемость слоя.

Преобразованная плотность сторонних токов j_{ct} в витке с пренебрежимо малым сечением записана с помощью δ -функции Дирака - $j_{ct} = I\delta(z-h)\delta(\rho-R_1)$.

Уравнение (3) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, общее решение которого будем искать в виде:

$$A^* = \frac{\mu\mu_0}{2q} [\exp(qz)(B - \int_0^z j_{ct} \exp(-q\xi) d\xi + \exp(-qz)(C + \int_0^z j_{ct} \exp(q\xi) d\xi)] \quad (4)$$

где ξ - переменная интегрирования вдоль направления; B и C - величины, не зависящие от z и определяемые из граничных условий. Граничные условия для векторного потенциала известны и выражаются так:

$$A_p(\rho z) \Big|_{z=z_p} = A_{p+1}(\rho z) \Big|_{z=z_p};$$

$$\frac{1}{\mu_p} \frac{\partial A_p}{\partial z} \Big|_{z=z_p} = \frac{1}{\mu_{p+1}} \frac{\partial A_{p+1}}{\partial z} \Big|_{z=z_p}.$$

Используя обратное преобразование Фурье-Бесселя:

$$A = \int_0^\infty A^*(\lambda_1, R_1) J_1(\lambda\rho) \lambda d\lambda$$

можно записать уравнение (4) для векторного потенциала A^* в различных областях рассматриваемой модели:

- для верхнего полупространства:

$$A^* = \frac{\mu_0 R_1 I}{2} \left[\int_0^\infty J_1(\lambda R_1) J_1(\lambda\rho) \exp(-\lambda|z-h|) d\lambda + \int_0^\infty J_1(\lambda R_0) J_1(\lambda\rho) \varphi_1 \exp(-\lambda|z+h|) d\lambda \right] \quad (5)$$

- для каждого слоя:

$$A^* = \frac{\mu_0 \mu_p R_1 I}{2} \left[\int_0^\infty J_1(\lambda R_1) J_1(\lambda\rho) (f_p \exp(q_p z) + \varphi_p \exp(-q_p z)) \frac{\lambda \exp(-\lambda h)}{q_p} d\lambda \right] \quad (6)$$

- для нижнего полупространства:

$$A^* = \frac{\mu_0 \mu_n R_1 I}{2} \left[\int_0^\infty J_1(\lambda R_1) J_1(\lambda\rho) \frac{\lambda}{q_n} * f_n \exp(q_n z - \lambda h) d\lambda \right] \quad (7)$$

причем функции f и φ входят в соответствующие выражения для граничных условий, например для p-того слоя:

$$B_p = IR_1 J_1(\lambda R_1) \exp(-\lambda h) f_p(\lambda, \mu_1 \dots \mu_n; q_1 \dots q_n; d_1 \dots d_{n-1})$$

$$B_p = IR_1 J_1(\lambda R_1) \exp(-\lambda h) \varphi_p(\lambda, \mu_1 \dots \mu_n; q_1 \dots q_n; d_1 \dots d_{n-1})$$

откуда напряженности электрического и магнитных полей можно найти, воспользовавшись соответствующими преобразованиями:

$$E_\varphi = -j\omega A_\varphi; \quad E_\rho = 0; \quad E_z = 0;$$

О ВОЗМОЖНОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ
ВИХРЕВЫХ ТОКОВ: МОДЕЛЬ ОТКЛИКА ВИХРЕТОКОВОГО ТРАНСФОРМАТОРНОГО
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

$$H_{\varphi} = 0; \quad H_{\rho} = -\frac{1}{\mu\mu_0} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z};$$

$$H_z = \frac{1}{\mu\mu_0\rho} \frac{\partial(\rho A_{\varphi})}{\partial \rho}.$$

Интегралы в выражениях (5-7) имеют вид:

$$J = \int_0^{\infty} F_p(\lambda) F_0(z, \lambda) d\lambda, \quad (8)$$

где $F_p(\lambda) = \varphi_1(\lambda)$ - в (5);

$$F_p(\lambda) = \frac{\lambda}{q_p} (f_p \exp(q_p z) + \varphi_p \exp(-q_p z)) -$$

в (6); переменная z обозначает $|z - h|$ или $|z + h|$ в (5) и h в (6-7);

$$F_p(\lambda) = \frac{\lambda}{q_n} (f_p \exp(q_n z)) - \text{в (7);}$$

Представим функцию $F_p(\lambda)$ в виде ряда Маклорена:

$$F_p(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} F_p^{(\nu)}(0)$$

Тогда выражение (8) примет вид:

$$J = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} F_p^{(\nu)}(0) \Phi^{(\nu)}(z) \quad (9)$$

где

$$\Phi(z) = \left[\int_0^{\infty} J_1(\lambda R) J_1(\lambda \rho) (f_p \exp(-\lambda z)) d\lambda \right]$$

Таким образом, получено точное выражение интересующего нас интеграла в виде бесконечной суммы. Но использовать этот ряд для практических расчётов трудно. Даже при быстрой сходимости ряда потребуется несколько первых членов а для этого придется вычислить несколько производных от $F_p(\lambda)$ и Φ , что затруднительно даже в случае простой структуры сред. Однако, анализируя функции $F_p(\lambda)$ и Φ , можно заметить, что одна из них зависит только от простран-

ственных координат, а вторая от параметров среды и координаты z . Тогда одним из путей получения приближенных решений, которым мы и воспользуемся в дальнейшем, является аппроксимация функций $F_p(\lambda)$ и Φ экспоненциальным рядом [5].

Функция $\Phi(z)$ может быть аппроксимирована рядом:

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \exp(-\alpha_i z), \quad (10)$$

где C_i и α_i - коэффициенты, не зависящие от z .

Тогда производная функции $\Phi(z)$ по z будет иметь следующий вид:

$$\Phi^{(\nu)}(z) = \sum_{i=1}^p (-\alpha_i)^{\nu} C_i \exp(-\alpha_i z) \quad (11)$$

А, подставив выражение (11) в (9) и изменив порядок суммирования, получим:

$$J = \sum_{i=1}^p C_i \exp(-\alpha_i z) \sum_{\nu=0}^{\infty} (-\alpha_i)^{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} F_p^{(\nu)}(0) \quad (12)$$

Поскольку

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-\alpha_i)^{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} F_p^{(\nu)}(0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_i^{\nu} \frac{1}{\nu!} F_p^{(\nu)}(0) = F_p(\alpha_i)$$

Итак, искомый интеграл разложен в ряд, однако, в отличие от (9), полученный ряд имеет конечное число членов и не содержит производных функции $F_p(\lambda)$. Для инженерных расчётов полей и сигналов, получаемых от датчиков, удовлетворительная точность получается при $p=1$.

Если $p=1$, то есть $\Phi(z) = C_1 \exp(-\alpha_1 z)$, то $J = F_p(\alpha_1) \Phi(z)$, тогда приближенное значение интеграла определяется при условии $\lambda = \alpha_1$.

Найдём коэффициенты аппроксимирующих экспонент. Обратимся к выражению (10). Известно, что этот интеграл выражается через присоединённые функции Лежандра второго рода через полные эллиптические интегралы первого Е и второго К рода:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi \sqrt{R_1 \rho}} \left[\frac{2-k^2}{k} K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right]$$

$$\text{где } k = \frac{2\sqrt{R_1 \rho}}{\sqrt{z^2 + (R_1 + \rho)^2}}.$$

Если в этом выражении полагать $\rho = R_2$, где R_2 - радиус некоторого коаксиального с первым витка, то значение этого выражения будет пропорционально коэффициенту взаимной индуктивности M между этими витками:

$$M = \mu_0 \sqrt{R_1 R_2} \left[\frac{2-k^2}{k} K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right]$$

Выражение в скобках, умноженное на 4π , обозначено $F(m)$. Учитывая это, коэффициент взаимной индукции выразится следующим образом:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \sqrt{R_1 R_2} F(m),$$

$$\text{где } m^2 = \frac{(R_1 - R_2)^2 + z^2}{(R_1 + R_2)^2 + z^2},$$

функцию $\Phi(z)$ легко определить через $F(m)$, если обозначить $\rho = R_2$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{R_1 R_2}} F(m)$$

Наличие таблиц функции $F(m)$ облегчает аппроксимацию функции $\Phi(z)$. Графики функции $F(m)$, построенные по этим таблицам в зависимости от нормированных переменных η и ξ , показывают, что функция действительно близка к экспоненте.

Если обозначить $F_* = a * \exp(-b\xi)$, то для определения значений a и b получим систему уравнений [6]:

$$F_*(\xi_1) = a * \exp(-b\xi_1) = F(\xi_1), \quad (13)$$

$$F_*(\xi_2) = a * \exp(-b\xi_2) = F(\xi_2). \quad (14)$$

Величины, характеризующие электромагнитное поле, интересуют нас в непосредственной близости к датчику, поэтому будем

считать, что значения лежат в пределах $\xi(0.2:0.8), \eta(0.5:1)$ м. В этом случае показатель экспоненты можно считать постоянным и равным 3, а величину a – линейной функцией η : $a = 34\eta - 10$. Погрешность аппроксимации при таком подходе не превышает 3 %, чего вполне достаточно для технических целей.

С учётом формул (13-14) функцию $\Phi(z)$ и коэффициенты C_1 и α_1 в (11) можно представить в виде:

$$\Phi(z) = \frac{34\eta - 10}{4\pi^2 \sqrt{R_1 R_2}} \exp(-3\xi),$$

$$C_1 = \frac{34\eta - 10}{4\pi^2 \sqrt{R_1 R_2}}, \quad \alpha_1 = \frac{3}{2R},$$

где R – большее из R_1, R_2 .

Подставив выражение (14) в (12), получим значение интеграла в виде:

$$J = \frac{34\eta - 10}{4\pi^2 \sqrt{R_1 R_2}} \exp(-3\xi) F_p(\lambda) \int_{\lambda=\alpha_1} \quad (15)$$

А выражения для векторных потенциалов теперь можно переписать так:

- для верхнего полупространства:

$$A_1 = \mu_0 I \frac{34\eta - 10}{8\pi^2} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \left(\exp\left(-\frac{3|z-h|}{2R}\right) + \varphi_1 \exp\left(-\frac{3|z+h|}{2R}\right) \right) \int_{\lambda=\frac{3}{2R}} \quad (16)$$

- для каждого слоя:

$$A_p = \mu_0 \mu_p I \frac{34\eta - 10}{8\pi^2} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \exp\left(-\frac{3h}{2R}\right) \frac{\lambda}{q_p} (f_p \exp(q_p z) + \varphi_p \exp(-q_p z)) \int_{\lambda=\frac{3}{2R}} \quad (17)$$

- для нижнего полупространства:

$$A_n = \mu_0 \mu_n I \frac{34\eta - 10}{8\pi^2} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \exp\left(-\frac{3h}{2R}\right) * \frac{\lambda}{q_p} f_p \exp(q_p z) \int_{\lambda=\frac{3}{2R}} \quad (18)$$

О ВОЗМОЖНОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ: МОДЕЛЬ ОТКЛИКА ВИХРЕТОКОВОГО ТРАНСФОРМАТОРНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

В уравнениях (16-18) использованы следующие нормированные переменные:

$$\eta = \frac{R_2}{R_1}, \text{ если } \frac{R_2}{R_1} \leq 1 \text{ или } \eta = \frac{R_1}{R_2}, \text{ если } \frac{R_1}{R_2} \leq 1;$$

$$\xi = \frac{z}{2R_1}, \text{ если } \eta = \frac{R_2}{R_1} \text{ или } \xi = \frac{z}{2R_2}, \text{ если } \eta = \frac{R_1}{R_2}.$$

Таким образом, получена модель, позволяющая проводить расчеты напряжения, вносимого в измерительную обмотку ВТП потенциалами как верхнего и нижнего полупространств относительно возбуждающей обмотки, так и слоями среды композиционного материала. Использование предложенной модели с соответствующими допущениями, сделанными при решении уравнения Гельмгольца, позволяет не только численно рассчитывать промежуточные параметры, напряжение, наводимое в измерительной обмотке вихретокового преобразователя и его абсолютное значение, а также устанавливать зависимость импеданса от реальной части комплексного вносимого напряжения для многослойной композитной среды в зависи-

мости от взаимного расположения обмоток датчика и обобщенного параметра, зависящего от ее строения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Герасимов В.Г., Ключев В.В., Шатерников В.Е. Методы и приборы электромагнитного контроля промышленных изделий. – М.: Энергоатомиздат, 1983.
2. Гинзбург В.Л. Электродинамика. – М.: Наука. 2004. – 78 с.
3. Ханина Т.М., Дмитриев С.Ф. // В сб. "Алтайский университет – науке". – Барнаул: Изд-во АГУ, 1993. – С. 40-45.
4. Vernon S.N. // Mater. Eval. 1988. 46. №12. P.1581-1587.
5. Дмитриев С.Ф., Сагалаков А.М. // В сб. трудов второй междунар. н.-т. конф. "Экспериментальные методы в физике структурно-неоднородных конденсированных сред. ЭМФ-2001". – Барнаул: Изд-во АГУ, 2001. – С. 7378.
6. Сагалаков А.М., Дмитриев С.Ф., Тарусин Д.Ю., Ишков А.В. // Вестник ТГУ. – Бюлл. опер. научн. инф. № 64, март, 2006. – С. 25-29.