АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ РАБОЧЕГО ПРОЦЕССА БАРАБАННОГО СМЕСИТЕЛЯ

В.А.Марков, М.В.Пешков

Анализ кинематического режима движения частиц, элементарных объемов и организованного потока смеси в рабочем пространстве смесителя необходим для определения основных режимных и конструктивных параметров смесителя и возможной их оптимизации в зависимости от эффективности процесса приготовления смеси. Для барабанных смесителей основным режимным параметром является угловая скорость вращения корпуса **(ω)**, а кон-структивным внутренний диаметр или радиус корпуса **(R)**.

Составим основные уравнения движения одного бесконечно-малого элемен-тарного объема смеси (одной частицы), находящегося на внутренней поверхности корпуса барабана радиуса (**R**) и вращающегося с постоянной угловой скоростью (**ω**). Расчетная схема для вывода основных математических зависимостей и кинематического анализа движения элементарного объема смеси в корпусе барабанного смесителя представлена на рис.1. где $\mathbf{A_o}$ - начальное положение элементарного объема смеси массой **m**; $\mathbf{A_i}$ - текущее положение элементарного объема; **R** – внутренний радиус корпуса смесителя.

Для вывода уравнений принимаем вращение корпуса по часовой стрелке, постоянные координаты **ХОУ** за пределами корпуса и локальную систему подвижных координат $\mathbf{X_1O_1У_1}$, с центром $\mathbf{O_1}$, совпадающим с осью вращения корпуса, причем ось $\mathbf{X_1}$, постоянно совмещена с текущим положением элементарного объема смеси **($\mathbf{A_i}$)**. В начальный момент элементарный объем (массой **m**) занимает положение **Ао**.

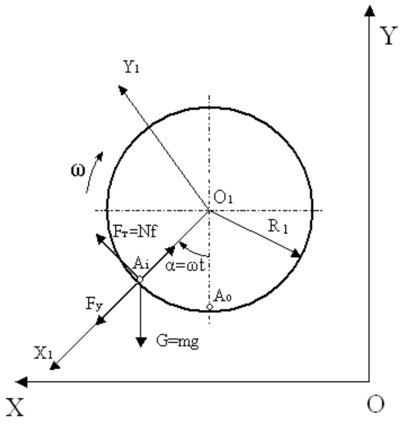

Рисунок 1 - Схема действующих сил при движении элементарного объема смеси без проскальзывания (в первом квадранте).

При вращении корпуса с постоянной угловой скоростью **(ω)**, элементарный объем при отсутствии скольжения по поверхности корпуса вместе с ним переместится в точку $\mathbf{A_i}$, отклоненную от вертикали на угол a. В точке $\mathbf{A_i}$ элементарный объем будет находиться в состоянии относительного покоя, если силы действующие на него уравновешиваются. В положении относительного покоя на элементарный объем смеси находящийся на внутренней поверхности корпуса, действуют силы:

G - сила тяжести, направленная вертикально вниз и определяемая по формуле **G=mg;**

$\mathbf{F_ц}$ - центробежная сила или сила инерции переносного движения, направленная по радиусу $\mathbf{OA_1}$ и определяемая по формуле: $\mathbf{F_ц=m\omega^2R}$;

N - реакция поверхности корпуса, направленная по нормали к поверхности;

$\mathbf{F_т}$ - сила трения, направленная по касательной к поверхности в сторону вращения корпуса; определяемая по формуле $\mathbf{F_т=fN}$, где **f**-коэф-фициент трения смеси по поверхности корпуса или **f= tg**φ; где φ-угол внешнего трения смеси.

Составляем сумму проекций сил, приложенных к элементарному объему на выбранные подвижные оси координат $\mathbf{X_1O_1У_1}$. Элементарный объем смеси будет находиться в состоянии относительного покоя в случае, когда проекции всех сил на соответствующие оси будет равна нулю:

по оси $\mathbf{OX_1}$: $$F_ц - N + G\cdot\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

по оси $\mathbf{OУ_1}$: $$F_T - G\cdot\sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

или $$m\omega^2R - N + mg\cdot\cos\alpha = 0 \qquad (3)$$

$$Nf - mg\cdot\sin\alpha = 0 \qquad (4)$$

Из уравнения (3): выразим **N** и подставим в уравнение (4).

$$N = m\omega^2R + mg\cdot\cos\alpha = m(\frac{\omega^2R}{g} + \cos\alpha) \qquad (5)$$

или $$mgf(\frac{\omega^2R}{g} + \cos\alpha) - mg\cdot\sin\alpha = 0 \qquad (6)$$

Из уравнения (6) следует, что элементарный объем будет находиться в состоянии покоя относительно внутренней поверхности корпуса до тех пор, пока реакция поверхности **(N)** будет больше или равна составляющей силы веса элементарного объема. Условие относительного покоя можно записать в виде неравенства:

$$mgf\left(\frac{\omega^2 R}{g}+\cos\alpha\right)\geq mg\cdot\sin\alpha \qquad (7)$$

Проведем сокращения и преобразования неравенства 7, которое после преобразования принимает вид:

$$\frac{\omega^2 R}{g\cdot\sin\varphi}\geq\sin(\alpha-\varphi) \qquad \text{или}$$

$$\frac{\omega^2 R}{g}\geq\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\alpha} \qquad (8)$$

Проведем подробный анализ, полученного выражения (8).. В левой части выражения имеем $\boldsymbol{\omega^2 R/g}$, представляющее отношение центробежного ускорения $\boldsymbol{\omega^2 R}$ к ускорению свободного падения **g**, и являющиеся по известным законам механики, показателем энергонасыщенности или энергопотребления механической системы. Следовательно, в $\boldsymbol{\omega^2 R/g}$ может быть использовано для оценки эффективности (энергозатрат) разных типов смесителей, обеспечивающих получение смесей равного качества. Более эффективным (менее энергоемким) будет тот тип смесителя, у которого будет меньшее значение показателя $\boldsymbol{\omega^2 R/g}$ при обеспечении одинаковой производительности и получения смеси равного качества. Если отношение $\boldsymbol{\omega^2 R/g}$ домножить в числителе и знаменателе на **R**, то получим выражение $\boldsymbol{\omega^2 R^2/gR}$ или $\boldsymbol{V^2/gR}$, представляющее собой известный критерий кинематического и динамического подобия механических систем - число Фруда **(Fr)**, характеризующее соотношение между инерционными силами и силой тяжести, действующими на элементарный объем жидкости, газа или дисперсной среды (в нашем случае - элементарный объем связно-сыпучей смеси).

где **V**-линейная скорость элементарного объема (м/с);

R-координата центра тяжести элементарного объема или материальной точки в движущейся системе (м).

Условие подобия двух или более движущихся систем определяется равенством для них числа Фруда **(Fr)**. Следовательно, полученный в выражении (8) критерий подобия - число Фруда можно применить в расчетах при переходе от физических моделей смесителей или пилотных образцов (лабораторные образцы) к опытно-промышленным образцам, или для построения типоразмерного ряда смесителей.

Приняв новое обозначение $\boldsymbol{Fr=\omega^2 R^2/gR}$ можно записать выражение (8) следующим образом: $\boldsymbol{Fr\geq \sin(\alpha-\varphi)/\sin\alpha}$. Таким образом, выражения (5) и (8) определяют условие существования относительного покоя элементарного объема смеси на внутренней поверхности корпуса. Относительный покой элементарного объема выполним при следующих условиях:

Во-первых, необходимо положительное значение реакции поверхности корпуса **(N)**, так как при этом условии элементарный объем может удерживаться на внутренней поверхности корпуса. Тогда выражение (5) применяет вид неравенства **N>0**. После подстановки в выражение (5), принятого обозначения $\boldsymbol{Fr=\omega^2 R^2/gR}$, и, записав его в виде неравенства, получим условие удержания элементарного объема смеси на поверхности корпуса:

$$mg(Fr+\cos\alpha)\rangle 0 \qquad (9)$$

Во-вторых, выражение (8) определяет условие гарантированного относительного покоя элементарного объема смеси на поверхности, т.е. элементарный объем движется с корпусом без скольжения.

Поскольку корпус поворачивается на угол α, а его значение зависит от угловой скорости **ω** и времени **t (α=ωt)**, то неравенство (8) содержит кроме постоянных для данной системы **R**,**φ**,**Fr**, переменную величину - времени **t**. Поэтому левая часть выражения (8) постоянная, а правая будет увеличиваться со временем (угол **α** – растет) и по истечению некоторого промежутка времени, обе части неравенства будут равны. Следовательно, предельное положение элементарного объема при относительном покое определяется из выражения (8), при равенстве левой и правой частей, в следующей записи:

$$Fr\cdot\sin\varphi=\sin(\alpha-\varphi) \qquad (10)$$

где α- угол, на который элементарный объем поднимается с поверхностью корпуса без скольжения.

Выражение (10) может служить уравнением для определения угла α перемещения (затаскивания) элементарного объема смеси без скольжения относительно корпуса. Уравнение (10) имеет два корня, поскольку равенство будет удовлетворять условию при значениях угла $\boldsymbol{\alpha_1}$, и $\boldsymbol{\alpha_2=\pi-(\alpha_1-2\varphi)}$, а сумма корней уравнения равна $\boldsymbol{\alpha_1+\alpha_2=\pi+2\varphi}$ и сохраняет постоянную величину. При наличии двух значений угла необходимо обосновать выбор одного из двух, т.к. один элементарный объем не может одновременно занимать два разных пространственных положения. Выбор угла можно обосновать следующим: при малой скорости вращения значение **Fr** достаточно мало, в этом случае правая часть уравнения (10) будет близка нулю, т.к. $\boldsymbol{\sin\varphi<1}$ и $\boldsymbol{\sin(\alpha-\varphi)\to 0}$. Условию когда $\boldsymbol{\sin(\alpha-\varphi)}$ стремится к нулю соответствуют два значения угла α; т.е. $\boldsymbol{\alpha_1\to\varphi}$ и $\boldsymbol{\alpha_2\to\pi+\varphi}$. Из этих двух значений углов физический смысл имеет только первое значение, второе значение не соответствует поставленной задаче барабанного смесителя, т.к. элементарный объем смеси не может без скольжения пройти угол больше π. Если конечно не рассматривать скорость вращения барабана, при которой элементарный объем центробежной силой прижмется к поверхности корпуса и будет без скольжения перемещаться вместе с ним. Следовательно, из двух корней уравнения (10) действительно первое значение и угол α, на который элементарный объем поднимается без скольжения. Можно получить из выражения (10):

$$\alpha = \varphi + \arcsin(Fr \cdot \sin\varphi) \qquad (11)$$

Следует отметить, что **sin(α-φ)** не может иметь значение превышающее единицу, поэтому и левая часть в уравнении (10). не может иметь значение больше единицы, поэтому можно записать:

$$Fr \cdot \sin\varphi \le 1 \qquad (12)$$

Оптимальное значение числа Фруда ($\mathbf{Fr_{оп}}$) определится при знаке равенства (10), т.е.:

$$Fr_{оп} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\varphi} \qquad (13)$$

Из выражения (13) можно определить предельную угловую скорость ($\boldsymbol{\omega_{пр}}$) или скорость вращения корпуса ($\mathbf{n_{пр}}$), при которых элементарный объем находится в предельном положении т.е. либо находится в крайнем положении покоя относительно корпуса, либо в начальной стадии скольжения:

$$Fr_{оп} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\omega_{пр}^2 R^2}{gR};$$

$$\omega_{оп}^2 = \frac{g \cdot \sin(\alpha - \varphi)}{R \cdot \sin\varphi} = \frac{g \cdot Fr_{оп}}{R}, \qquad \text{или}$$

$$\omega_{оп} = \sqrt{\frac{g \cdot \sin(\alpha - \varphi)}{R \cdot \sin\varphi}}; \qquad (14)$$

Если принять во внимание, что $\omega = \pi \cdot n / 30$, то имеем два варианта:

$$n_{оп} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g \cdot \sin(\alpha - \varphi)}{R \cdot \sin\varphi}};$$

$$\omega_{оп} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{gFr_{оп}}{R}}; \qquad (15)$$

Знание значений угла внешнего трения для необходимой влажности смеси и аналитический расчет угла α позволяют использовать разработанную математическую модель процесса движения потока частиц и элементарных объемов смеси в поперечном сечении корпуса для исследования области оптимальных режимных параметров барабанного смесителя с заданным радиусом корпуса.

Значение числа Фруда можно получить расчетом по уравнению (13) с последующей экспериментальной проверкой на физических моделях или действующих образцах смесителей. Полученные значения числа Фруда ($\mathbf{Fr_{оп}}$) являются основой для расчета режимных параметров барабанного смесителя с любым радиусом корпуса, ибо выполнить аналитический расчет типоразмерного ряда барабанных смесителей.

Из уравнений (14) и (15) определить оптимальную угловую скорость **(ω)** и число оборотов ($\mathbf{n_{оп}}$) чисто аналитическим путем достаточно сложно, поэтому целесообразно использовать эти уровнения в критериальной форме выразив α и φ через критерий подобия - числа Фруда и получить выражение удобное для инженерных расчетов:

Таким образом, критерий подобия $\mathbf{Fr_{оп}}$ определяется не только аналитически (12), но и проверяется экспериментально на физических моделях или действующих образцах..